

Analytische Geometrie

der Ebene.

Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben nebst Erläuterungen und Resultaten

von

J. Schlotke

Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg.

Mit 97 Figuren.

Dresden,
Verlag von Gerhard Kühtmann.
1891.

Analytische Geometrie

der Ebene.

Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben nebst Erläuterungen und Resultaten

von

J. Schlotke

Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg.

Mit 97 Figuren.

Dresden,

Verlag von Gerhard Kühtmann.

1891.

Vorwort.

In der vorliegenden Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene sind die Linienkoordinaten mehr berücksichtigt, als dies bisher in den Lehrbüchern der Fall war. Ebenso findet man zahlreiche Anwendungen der Determinanten, die sich in der analytischen Geometrie besonders nützlich erweisen. Dennoch enthält das Buch auch für solche ausreichenden Übungsstoff, denen die Rechnung mit Determinanten nicht geläufig ist. — Die Kegelschnitte sind bei ihrer hervorragenden Wichtigkeit selbstverständlich mehr berücksichtigt, als die Kurven höherer Ordnung; von den letzteren ist nur das Notwendigste aufgenommen worden, was aber wohl ausreichend sein dürfte. Abschnitt VIII enthält noch eine Reihe von Aufgaben über das Princip der reciproken Radien und über Polarkurven, welche nicht zu schwierige und anregende Übungen darbieten. Wenn hier nun einige die Grenzen des Buches überschreitende Anwendungen auf räumliche Gebilde vorkommen, so möge berücksichtigt werden, dass dieselben nur die Kenntnis der elementaren Stereometrie voraussetzen, und im übrigen so einfach sind, dass sie dem Schüler erhebliche Schwierigkeiten nicht verursachen werden. Auch die homogenen oder Dreieckskoordinaten sind kurz erwähnt. Für Aufgaben, welche sich nur auf Lagenbeziehungen erstrecken, sind die letzteren ganz besonders geeignet und finden deshalb in diesem Gebiet in ausgedehntester Weise Verwendung. (Man sehe besonders: „Vorlesungen über Geometrie“ von A. Clebsch, herausgegeben von F. Lindemann.)

Dass die Koordinatenverwandlungen nicht, wie dies häufig geschieht, gleich nach der Erklärung der Koordinaten aufgenommen sind, sondern erst da, wo sich Verwendung dafür findet, dürfte bei einem ersten Unterricht in der analytischen Geometrie gerechtfertigt sein. Ebenso halten wir es für richtig, bei der Gleichung der Geraden nicht mit der allgemeinen Form $ax + by + c = 0$ zu beginnen, sondern den im Buche angegebenen Gang zu befolgen. — Man erschwert dem Anfänger das Studium der analytischen Geometrie sonst ebenso unnötig, als wenn man bei den Kurven zweiten Grades mit der allgemeinen Gleichung beginnend, aus dieser die besonderen Fälle herleiten würde.

Die den Aufgaben hinzugefügten Resultate und die zahlreichen Entwickelungen dürften den Gebrauch des Buches wesentlich erleichtern.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

1) Auf einer Geraden MN ist ein fester Punkt A gegeben. — Soll nun die Lage eines beliebigen Punktes P dieser Geraden in Bezug auf A bestimmt werden, so ist nicht nur die Entfernung des Punktes P von A anzugeben, sondern auch die Richtung, nach welcher die Strecke AP von A aus abzutragen ist. — Liegen nun zwei Punkte P und Q auf derselben Seite von A (in unserer Figur rechts) und ist $AP = a$, $PQ = b$, so ist die Entfernung des Punktes Q von A gleich $a + b$, wenn beide Entfernungen in der Richtung von A nach N gemessen werden. — Wird aber b in der Richtung von P nach A abgetragen, so hat der Punkt Q von A den Abstand $a - b$; Q liegt in diesem Falle mit P auf derselben Seite von a, wenn $a > b$, oder wenn $a - b$ positiv ist. — Wenn aber $b > a$, so wird der Abstand negativ und Q liegt alsdann auf der entgegengesetzten Seite von A. Ist z. B. $a = 5$, $b = 8$, so liegt der Punkt Q in dem letzteren Falle in der Richtung von A nach M d. h. in der Entfernung -3 von A.

Den Abstand eines beliebigen Punktes P der Geraden MN von dem festen Punkte A nennt man die Abscisse desselben. — P liegt also auf AN wenn seine Abscisse positiv, und auf AM, wenn sie negativ ist.

Sind x_1 und x_2 die Abscissen zweier Punkte P_1 und P_2, so hat man für die Entfernung der beiden Punkte von einander:

$$P_1P_2 = x_2 - x_1,$$

welche Formel für alle Werte von x_1 und x_2 gültig ist. — Man kann, wenn es sich nur um die absolute Entfernung der beiden Punkte handelt, diese Differenz auch stets so einrichten, dass dieselbe positiv ausfällt, wenn man nur die kleinere Abscisse von der grösseren subtrahiert.

Ist x_2 positiv und x_1 negativ, so liegen P_1 und P_2 auf verschiedenen Seiten von A, und man findet

$$P_1P_2 = x_2 - (-x_1) = x_2 + x_1.$$

Sind beide Abscissen negativ und $x_2 > x_1$ (absolut genommen), so ist:

$$P_1P_2 = x_1 - (-x_2) = x_2 - x_1,$$

u. s. f.

2) Beweise, dass die Abscisse der Mitte zwischen zwei Punkten, deren Abscissen x_1 und x_2 sind, gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{x_1 + x_2}{2}$ ist. — Es soll ferner gezeigt werden, dass diese Formel für alle Lagen der beiden Punkte gültig ist.

3) Die Abscisse eines Punktes kann auch durch eine Gleichung bestimmt sein. Soll z. B. die Abscisse x desjenigen Punktes gefunden werden, welcher die Strecke $AP = a$ nach dem Verhältnis m zu n teilt, so ergiebt sich dieselbe aus der Proportion

$$x : a - x = m : n$$

woraus folgt

$$x = \frac{am}{m + n}.$$

4) Die Abscissen zweier Punkte P und Q sind a bez. b, $(b > a)$. Man soll die Abscisse x desjenigen Punktes M bestimmen, für welchen $PM^2 + QM^2 = k^2$ ist.

Man findet $x = \frac{a + b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - (a - b)^2}$.

Da nun $\frac{a + b}{2}$ die Abscisse der Mitte zwischen P und Q ist, so findet man zwei, in Bezug auf diese Mitte symmetrisch liegende Punkte, welche der Aufgabe genügen. —

5) Bestimme die Abscisse desjenigen Punktes, welcher die Strecke PQ stetig teilt, wenn a bez. b die Abscissen von P und Q sind; $(b > a)$.

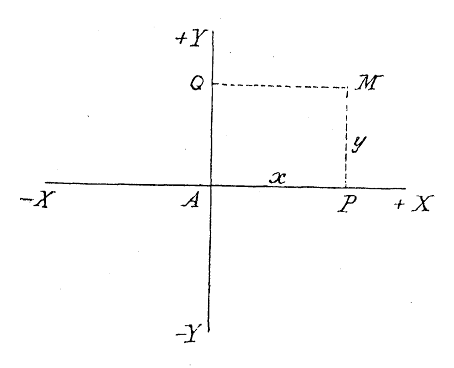
Man findet $x = \frac{3b - a \pm (b - a)\sqrt{5}}{2}$.

Koordinatensysteme.

Rechtwinklige Koordinaten.

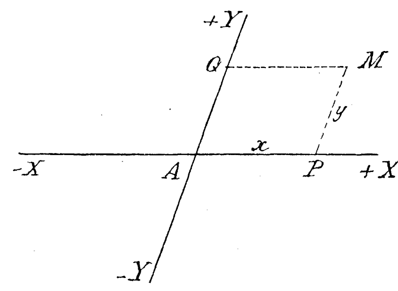
6) Die Lage eines beliebigen Punktes in einer Ebene wird am einfachsten auf zwei in der Ebene liegende feste Geraden, welche senkrecht aufeinander stehen, bezogen. — Diese beiden Geraden AX und

AY heissen Koordinatenachsen, AX die Abscissenachse, AY die Ordinatenachse; ihr Schnittpunkt A der Anfangspunkt. Die Abstände eines Punktes M von den beiden Achsen nennt man die Koordinaten des Punktes M und zwar QM = AP = x die Absisse, MP = y die Ordinate. — Um anzudeuten, dass der Punkt M die Koordinaten x und y habe, schreibt man: „M (x, y)“. Bei jeder der Achsen unterscheidet man zwei Richtungen vom Anfangspunkt aus gerechnet, die positive und die negative Richtung (wie in der Fig. angegeben). Die Lage eines Punktes ist durch Grösse und Vorzeichen seiner Koordinaten völlig bestimmt.



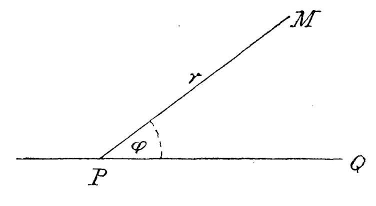
Schiefwinklige Koordinaten.

7) Die Koordinatenachsen können auch einen beliebigen Winkel miteinander bilden. In diesem Falle sind die Koordinaten x und y eines Punktes M die Entfernungen desselben von den Achsen parallel zu den letzteren gemessen.



Polarkoordinaten.

8) Ist PQ eine feste Gerade (Achse) und P ein fester Punkt (Pol) in derselben, so ist die Lage eines beliebigen Punktes M in der Ebene auch bestimmt durch die Strecke PM = r (Leitstrahl) und durch den Winkel φ, welchen PM mit PQ bildet. Der letztere wird von PQ aus in der angegebenen Pfeilrichtung gemessen. Der Winkel φ und der Leitstrahl r heissen die Polarkoordinaten des Punktes M.



Andere Koordinatensysteme können erst später ihre Erklärung finden. —

9) Besteht zwischen zwei Veränderlichen x und y eine Gleichung

$y = f(x)$, $F(x, y) = 0$ [oder auch $r = f(\varphi)$], so drückt dieselbe die Art der Abhängigkeit der einen Veränderlichen von der anderen aus. — Zu jedem willkürlich gewählten Wert des x lässt sich ein Wert von y aus der Gleichung bestimmen. Solche zusammengehörige Werte von x und y betrachtet man als Koordinaten eines Punktes, und man erhält, wenn man x stetig verändert, unzählig viele Punkte, welche eine Kurve bilden. — Die Gestalt derselben ist durch die Gleichung zwischen x und y völlig bestimmt und man nennt deshalb letztere die „Gleichung der Kurve".

Die Aufgabe der analytischen Geometrie ist nun: Aus gegebenen Eigenschaften einer Kurve ihre Gleichung zu finden, und umgekehrt die Gestalt und die Eigenschaften der Kurven aufzufinden, welche in gegebenen Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen enthalten sind.

I. Abschnitt.

Aufgaben über Punktkoordinaten.

1) Es sollen die Lagen folgender, durch ihre rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Punkte durch Zeichnung dargestellt werden.

$M_1(4, 6)$, $M_2(-6, 2)$, $M_3(8, -3)$, $M_4(-4, -6)$, $M_5(5, 0)$, $M_6(0, 10)$, $M_7(-3, 0)$, $M_8(0, -1)$, $M_9(0, 0)$. —

2) Die Entfernung des Punktes $M(x_1, y_1)$ vom Anfangspunkt zu finden.

Antw. $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Zahlenbeispiele. α) (5, 12), β) (— 12, 16), γ) (— 8, — 15)
Antw. α) 13, β) 20, γ) 17.

3) Wie gross ist die Entfernung der beiden Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$ voneinander? Antw. $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Zahlenbeispiele. α) $M_1(17, 9)$, $M_2(5, 4)$ Antw. 13
β) $M_2(-7, 9)$, $M_2(2, -3)$ „ 15.

4) Aus den Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks $M_1(5, 12)$, $M_2(-3, -3)$, $M_3(9, -8)$ die Längen der Seiten desselben zu berechnen.

Antw. $M_1M_2 = 17$, $M_1M_3 = 4\sqrt{26}$, $M_2M_3 = 13$.

5) Die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke M_1M_2 durch die Koordinaten ihrer Endpunkte auszudrücken. —

Antw. Sind $x_1 y_1$ die Koordinaten von M_1, und $x_2 y_2$ die von M_2, so findet man für die Koordinaten der Mitte zwischen M_1 und M_2:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Zahlenbeispiele. α) $M_1(4, 12)$, $M_2(16, 8)$; β) $M_1(4, -8)$, $M_2(-10, 6)$; γ) $M_1(6, -8)$, $M_2(-6, -4)$.

Antw. α) (10, 10); β) (— 3, — 1); γ) (0, — 6).

6) Die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks $M_1M_2M_3$ sind gegeben: $M_1(-6, 2)$; $M_2(4, 16)$; $M_3(20, -6)$; es sollen die Koordinaten der Mitten der Dreiecksseiten bestimmt werden. —

Antw. Man findet für die Mitte von M_1M_2 die Koordinaten (—1, 9)
„ „ „ „ „ „ M_1M_3 „ „ (7, —2)
„ „ „ „ „ „ M_2M_3 „ „ (12, 5).

7) Es soll nachgewiesen werden, dass sich in jedem Viereck die Verbindungslinien der Mitten von je zwei gegenüberliegenden Seiten gegenseitig halbieren. — Der Halbierungspunkt ist auch die Mitte der Verbindungslinien der Mittelpunkte der beiden Diagonalen des Vierecks. —

8) Zwei Punkte $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$ sind gegeben. — Man soll die Koordinaten desjenigen Punktes P auf der Geraden M_1M_2 bestimmen, dessen Abstände von M_1 und M_2 das Verhältnis $\alpha : \beta$ haben. —

Antw. Nennt man die Koordinaten von P, x und y und liegt derselbe zwischen M_1 und M_2, so findet man:

$$x = \frac{\alpha x_2 + \beta x_1}{\alpha + \beta}, \quad y = \frac{\alpha y_2 + \beta y_1}{\alpha + \beta}.$$

Dividiert man in diesen Ausdrücken Zähler und Nenner durch β und setzt $\frac{\alpha}{\beta} = k$, so ist:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Liegt der Punkt P ausserhalb der Strecke M_1M_2 so findet man:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}.$$

Ist in diesen letzten Formeln $0 < k < 1$ so liegt P ausserhalb M_1M_2 an der Seite von M_1; für $k > 1$ aber an der Seite von M_2. — Für $k = 1$ liegt P in unendlicher Entfernung. —

9) Die Mittellinien eines Dreiecks teilen sich nach einem bekannten Satze der Planimetrie nach dem Verhältnis 1 : 2. Man soll hieraus die Koordinaten des Durchschnittspunktes der drei Mittellinien des in Aufg. 6 gegebenen Dreiecks bestimmen. Antw. 6, 4.

10) Welches sind die Koordinaten des Durchschnittes der drei Mittellinien, wenn die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$, $M_3(x_3y_3)$ sind?

Antw. $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

11) Die Koordinaten der Mitten der Seiten eines Dreiecks sind (4, 6), (8, 2), (10, 12); man soll die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks bestimmen. Antw. (2, — 4), (6, 16), (14, 8).

12) Es sind die beiden Punkte $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$ gegeben. — Aus den Koordinaten derselben soll der Flächeninhalt des Dreiecks gefunden werden, dessen Ecken M_1, M_2 und der Anfangspunkt der Koordinaten sind.

Antw. Man findet für die doppelte Fläche die Formel

$$2F = y_1x_2 - y_2x_1 = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ x_1 x_2 \end{vmatrix}$$ oder auch, abgesehen vom Vorzeichen $\begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}$.

13) Aus den Koordinaten der Ecken des Dreiecks $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$, $M_3(x_3y_3)$ die Fläche F desselben zu berechnen.

Antw. $2F = y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)$

oder auch $2F = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$

welche Formel sich auch so schreiben lässt:

$$2F = \begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \end{vmatrix}.$$

Ist diese Determinate gleich Null, so liegen die gegebenen Punkte in einer Geraden. —

14) Den Flächeninhalt eines beliebigen Vielecks aus den Koordinaten der Eckpunkte zu berechnen. —

Aufl. Man nehme innerhalb des Vielecks einen beliebigen Punkt O(x, y) an, und verbinde denselben mit allen Eckpunkten des Vielecks durch Geraden. — Die Flächeninhalte der hierdurch entstandenen Dreiecke werden nach einer der in 13) gefundenen Formeln bestimmt, und addiert. —

Sind $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$, ... $M_n(x_ny_n)$ die Eckpunkte, so findet man für die Fläche F die folgende Formel:

$2F = y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \cdots y_n(x_{n-1} - x_1)$

od. auch: $2F = x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \cdots x_n(y_1 - y_{n-1})$.

15) Wie gross sind die Inhalte folgender Dreiecke:

α) $M_1(2, 6)$, $M_2(12, 16)$, $M_3(20, 4)$

β) $M_1(24, 8)$, $M_2(6, -8)$, $M_3(0, 12)$

γ) $M_1(-2, 10)$, $M_3(-8, -14)$, $M_3(-18, -6)$.

Antw. α) 100; β) 228; γ) 144.

16) Den Inhalt des Fünfecks $M_1(-8, 6)$, $M_2(2, 12)$, $M_3(18, 8)$, $M_4(14, -10)$, $M_5(-4, -6)$ zu bestimmen. Antw. 398.

17) Wie gross ist die Entfernung der beiden Punkte $M_1(\varphi_1 r_1)$, $M_2(\varphi_2 r_2)$? Antw. $M_1M_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

18) Den Inhalt des Dreiecks $M_1(\varphi_1 r_1)$, $M_2(\varphi_2 r_2)$, P(0, 0) zu finden.

Antw. $2F = r_1r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$.



II. Abschnitt.

Die gerade Linie.

1) Schneidet eine Gerade die Ordinatenachse in dem Abstand b und die Abscissenachse im Abstand c vom Anfangspunkt und ist P(x, y), (Fig. 1), ein beliebiger Punkt der Geraden, so findet man leicht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AMN und NPQ:

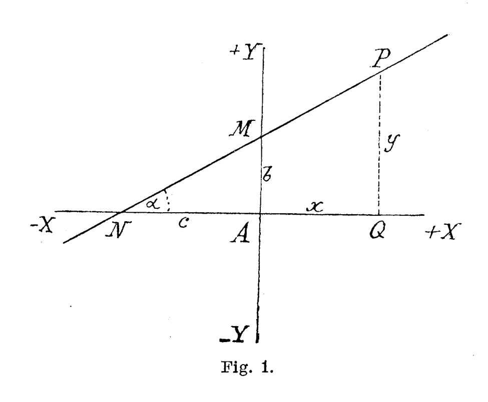


Fig. 1.

$$y : x + c = b : c,$$

woraus

$$y = \frac{b}{c} x + b.$$

oder wenn man den Bruch $\frac{b}{c}$ kurz mit a bezeichnet:

$$y = ax + b \qquad (1)$$

Diese Gleichung drückt die Art der Abhängigkeit der Ordinate y eines beliebigen Punktes der Geraden von der Abscisse x desselben aus; sie ist folglich die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden Punkte M und N ihrer Lage nach bestimmt ist. — Der Koeffizient a bedeutet die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Gerade mit der positiven Richtung der Abscissenachse bildet, und die Konstante b ist die Strecke, welche die Gerade auf der Ordinatenachse abschneidet. — Aus der Gleichung der Geraden kann man zu jedem willkürlich gewählten x das zugehörige y berechnen. — Zwei zusammengehörige Werte von x und y welche, wie man sagt „der Gleichung der Geraden genügen“, sind die Koordinaten eines Punktes der Geraden. — Ist z. B. die Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2} x + 5$$

gegeben, so findet man für $x = 2$, $y = 6$; also sind 2 und 6 die Koordinaten eines Punktes der durch obige Gleichung bestimmten Geraden. — Setzt man $x = 4$, so ist $y = 7$, ebenso ist für $x = 6$, $y = 8$ u. s. f.

Trägt man diese Koordinaten (s. Fig. 2) nach irgend einem Massstabe auf, so erhält man die Punkte M_1, M_2, M_3 . . welche auf der durch die gegebene Gleichung bestimmten Geraden liegen. — Setzt man $x = 0$ so folgt $y = 5$; diese beiden Koordinaten geben einen auf der

Ordinatenachse liegenden Punkt. — Der Durchschnitt der Geraden mit der Abscissenachse hat die Ordinate 0; die Abscisse dieses Punktes ist folglich derjenige Wert von x, welcher, in die Gleichung der Geraden eingesetzt, y zu 0 macht. — Man findet demnach diese Abscisse aus der Gleichung $0 = \frac{1}{2}x + 5$, woraus sich $x = -10$ ergiebt. —

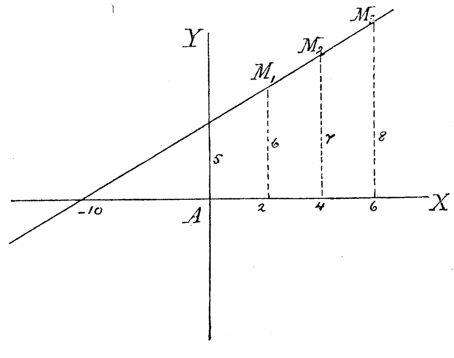


Fig. 2.

Der Winkel α, welchen die Gerade mit der Abscissenachse bildet, ergiebt sich aus der Gleichung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$. —

2) Es sollen folgende Geraden gezeichnet, und ihre Durchschnittspunkte mit den Achsen durch Rechnung gefunden werden:
a) $y = \frac{1}{2}x + 8$, b) $y = -\frac{3}{4}x + 9$, c) $y = \frac{3}{2}x - 12$, d) $y = -\frac{2}{3}x - 10$.

Bezeichnet man den Durchschnittspunkt einer Geraden mit der Abscissenachse durch P, und den Durchschnitt mit der Ordinatenachse durch Q so findet man für die obigen Geraden:

a) $P(-16, 0)$; b) $P(12, 0)$; c) $P(8, 0)$; d) $P(-15, 0)$
$Q(0, 8)$ $Q(0, 9)$ $Q(0, -12)$ $Q(0 - 10)$.

3) Welchen Winkel bildet jede der vorigen Geraden mit der Abscissenachse?

Antw. a) $26°33'54''$. b) $143°7'48''$. c) $56°18'36''$. d) $146°18'36''$.

Anm. Eine Gerade, deren Gleichung $y = ax + b$ ist, bildet mit der positiven Richtung der Abscissenachse einen spitzen Winkel, wenn $a > 0$, einen stumpfen Winkel, wenn $a < 0$. —

4) Wie heisst die Gleichung der Geraden, welche die Abscissenachse in dem Abstand $+6$ und die Ordinatenachse in dem Abstand $+5$ vom Anfangspunkt schneidet, und wie gross ist die Ordinate desjenigen Punktes der Geraden, dessen Abscisse 12 ist?

Antw. $y = -\frac{5}{6}x + 5$; -5.

5) Wie heisst die Gleichung der Geraden, welche mit der Abscissenachse einen Winkel von 45° bildet und auf der Ordinatenachse die Strecke 8 abschneidet? Antw. $y = x + 8$.

6) Gegeben die Gerade $y = -\frac{3}{4}x + 6$; man soll den Abstand des Punktes M der Geraden vom Koordinatenanfang bestimmen, wenn die Abscisse von $M = 4$ ist. Antw. 5.

7) Auf der Geraden $y = \frac{2}{3}x + 4$ liegt der Punkt M, dessen Abscisse 12 ist, ebenso ist die Abscisse des auf der Geraden $y = -\frac{3}{2}x + 12$ liegenden Punktes N gleich 4. Wie weit ist M von N entfernt?

Antw. 10.

8) Die Gleichung einer Geraden anzugeben, welche a) durch den Anfangspunkt geht; b) parallel zur Abscissenachse in der Entfernung k von dieser; c) parallel zur Ordinatenachse im Abstand c von letzterer; d) mit der Abscissenachse und e) mit der Ordinatenachse zusammenfällt.

Antw. a) $y = ax$; b) $y = k$; c) $x = c$; d) $y = 0$; e) $x = 0$.

9) Zu untersuchen, ob einige der Punkte $M_1(6, 8)$, $M_2(8, 8)$, $M_3(-6, 2)$, $M_4(-12, -2)$, $M_5(16, 14)$, $M_6(20, 15)$ auf der Geraden $y = \frac{1}{2}x + 5$ liegen.

(Auch graphisch darzustellen.)

10) Die allgemeine Bedingungsgleichung anzugeben, welche ausdrückt, dass der Punkt $M(x_1 y_1)$ auf der Geraden $y = ax + b$ liegt.

Antw. $y_1 = ax_1 + b$.

Setzt man den hieraus folgenden Wert von b in die Gleichung der Geraden ein, so heisst dieselbe: $y - y_1 = a(x - x_1)$. — Für jedes beliebige a bedeutet hiernach diese Gleichung eine Gerade, welche durch den Punkt $M(x_1 y_1)$ geht. — Eine Änderung des a in der Gleichung $y - y_1 = a(x - x_1)$ würde demnach eine Drehung der Geraden um M bewirken.

---

11) Die beiden Geraden $y = ax + b$ und $y = mx + n$ sind parallel, wenn sie mit der Abscissenachse gleiche Winkel bilden. Da nun a und m die trigonometrischen Tangenten dieser Winkel sind, so ist die Bedingung für die parallele Lage der beiden Geraden: $a = m$.

Man soll hiernach die Gleichung der Geraden finden, welche a) durch den Punkt $M(8, 14)$ geht und parallel zu der Geraden $y = \frac{3}{4}x + 2$ ist. b) Ebenso, wenn der Punkt $M(x_1 y_1)$ und die Gerade $y = ax + b$ gegeben sind.

Antw. α) $y = \frac{3}{4}x + 8$. β) $y - y_1 = a(x - x_1)$.

12) Wo schneidet die Gerade, welche durch den Punkt $M(-6, -9)$ geht und parallel zu der Geraden $y = -\frac{2}{3}x + 4$ ist, die Achsen?

Antw. Die Gerade schneidet die Abscissenachse in dem Abstand $-19\frac{1}{2}$, die Ordinatenachse im Abstand -13 vom Anfangspunkt. —

13) Eine Gerade G schneidet auf der Abscissenachse die Strecke 10, auf der Ordinatenachse die Strceke 6 ab. — Man soll die Gleichung

der Geraden finden, welche durch den Punkt M(15, 12) geht und parallel zu G ist.

Antw. $y = -\frac{3}{5}x + 21$.

14) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch die beiden Punkte $M_1(4, 6)$, $M_2(12, 10)$ geht.

Antw. Die Gleichung sei $y = ax + b$; da nun M_1 auf dieser Geraden liegen soll, so muss die Gleichung für y den Wert 6 geben, wenn $x = 4$ gesetzt wird, also muss sein:

$$6 = 4a + b.$$

Ebenso ist: $10 = 12a + b$ die Bedingung dafür, dass M_2 auf der Geraden liegt. — Aus diesen Gleichungen folgt $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$, folglich heisst die gesuchte Gleichung der Geraden:

$$y = \frac{1}{2}x + 4.$$

15) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch die Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$ geht. —

Antw. Auf dieselbe Weise wie in 14) ergiebt sich als Gleichung der Geraden: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Andere Ableitung. Sind M_1 und M_2 Fig. 3 die gegebenen Punkte, und ist P(xy) ein beliebiger Punkt der Geraden, so ziehe man durch M_1 die Gerade M_1Q parallel zur Abscissenachse. — Dann ist $AC = x_1$, $CM_1 = y_1$, $AD = x_2$, $DM_2 = y_2$, $AE = x$, $EP = y$. — Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke M_1PQ und M_1M_2N folgt:

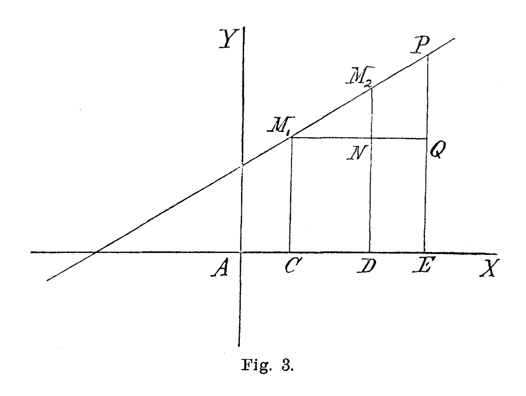


Fig. 3.

$$\frac{PQ}{M_2N} = \frac{M_1Q}{M_1N}, \text{ oder } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \text{ folglich:}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

16) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks und die Durchschnittspunkte ihrer Verlängerungen mit den Achsen aus den Koordinaten der Eckpunkte zu finden.

a) $M_1(-4, -8)$, $M_2(12, 16)$, $M_3(24, -12)$.

Antw. M_1M_2 schneidet die XAchse im Punkte $(1\frac{1}{3}, 0)$,
M_1M_2 „ „ YAchse „ „ $(0, -2)$,
M_1M_3 „ „ XAchse „ „ $(-60, 0)$,
M_1M_3 „ „ YAchse „ „ $(0, -8\frac{4}{7})$,
M_2M_3 „ „ XAchse „ „ $(18\frac{6}{7}, 0)$,
M_2M_3 „ „ YAchse „ „ $(0, 44)$.

b) $M_1(9, 12)$, $M_2(-8, 16)$, $M_3(-3, -4)$.

Antw. M_1M_2 schneidet die XAchse im Punkte $(60, 0)$,
M_1M_2 „ „ YAchse „ „ $(0, 14\frac{2}{17})$,
M_1M_3 geht durch den Anfangspunkt,
M_2M_3 schneidet die XAchse im Punkte $(-4, 0)$,
M_2M_3 „ „ YAchse „ „ $(0, -16)$.

17) Die Gleichungen der drei Mittellinien des Dreiecks $M_1(-5, 3)$, $M_2(11, 15)$, $M_3(7, 1)$ zu finden.

Antw. $y = \frac{5}{14}x + \frac{67}{14}$; $y = \frac{13}{10}x + \frac{7}{10}$, $y = -2x + 15$.

18) Wie heisst die Gleichung der Geraden, welche durch den Punkt $M_1(10, 18)$ geht und parallel zu der Verbindungslinie der beiden Punkte $M_2(4, 6)$, $M_3(14, 12)$ ist? Antw. $y = \frac{3}{5}x + 12$.

19) Durch die Eckpunkte des Dreiecks $M_1(-4, 4)$, $M_2(6, 12)$, $M_3(16, 8)$ werden Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten gezogen. — Wo schneiden diese Parallelen die Achsen?

Antw. Die XAchse wird in den Abständen 6, -54, 6, und die YAchse in den Abständen $2\frac{2}{5}$, $10\frac{4}{5}$, $-4\frac{4}{5}$ vom Anfangspunkt geschnitten. —

20) Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche durch den Punkt $M_1(x_1y_1)$ geht und parallel zu der Verbindungslinie der Punkte $M_2(x_2y_2)$, $M_3(x_3y_3)$ ist. —

Antw. $y - y_1 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_1)$.

21) Nachzuweisen, dass die Mitten der Seiten eines beliebigen Vierecks $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$, $M_3(x_3y_3)$, $M_4(x_4y_4)$ die Ecken eines Parallelogramms sind.

Anl. z. Aufl. Man stelle die Gleichungen der Verbindungslinien der Seitenmitten auf.

22) Die Koordinaten des Durchschnittes der beiden Geraden

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ y = mx + n \end{array}\right\}$$

zu bestimmen.

Aufl. Sind MN und PQ (Fig. 4) die beiden durch obige Gleichungen gegebenen Geraden, so würde man zu einer beliebig gewählten Abscisse AC = x aus der einen Gleichung die Ordinate CD, und aus der anderen Gleichung die Ordinate CE finden. — Setzt man jedoch für x die Abscisse AG des Durchschnittspunktes in beide Gleichungen ein, so muss sich aus beiden derselbe Wert für y, nämlich GF ergeben. — Die Koordinaten des Durchschnittspunktes zweier Geraden sind demnach diejenigen Werte von x und y, welche den Gleichungen beider zugleich genügen; man findet sie, wenn man die Gleichungen der beiden Geraden als Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y behandelt und sie nach diesen auflöst. — Die Koordinaten des Durchschnittes sind also:

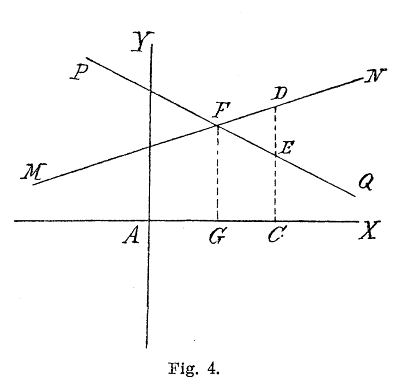


Fig. 4.

$$x = \frac{n - b}{a - m}, \quad y = \frac{an - bm}{a - m}.$$

Ist in diesen Ausdrücken $a = m$, so werden x und y unendlich gross, d. h. die beiden Geraden sind parallel (s. 11).

23) Welches sind die Koordinaten des Durchschnittes der beiden Geraden $y = \frac{1}{2}x + 5$ und $y = -\frac{1}{3}x + 15$.

Antw. 12, 11.

24) Die Koordinaten der Eckpunkte des von den drei Geraden

$$y = \tfrac{7}{3}x - 11\tfrac{1}{3}$$
$$y = \tfrac{2}{7}x - 3\tfrac{1}{7}$$
$$y = -\tfrac{5}{4}x + 24\tfrac{1}{2}$$

eingeschlossenen Dreiecks zu finden.

Antw. (4, —2), (10, 12), (18, 2).

25) Die Koordinaten des Durchschnittes der drei Mittellinien des Dreiecks $M_1(4, 4)$, $M_2(10, 14)$, $M_3(22, -6)$ zu finden. —

Anl. Man suche zuerst die Koordinaten der Mitten der Dreiecksseiten, bestimme hiernach die Gleichungen der drei Mittellinien, und ermittele aus zwei derselben die Koordinaten des Durchschnittspunktes. — Diese müssen auch der Gleichung der dritten Mittellinie genügen. — Man findet (12, 4).

26) Ebenso die Koordinaten des Durchschnittes der drei Mittellinien zu finden, wenn die Gleichungen der Seiten des Dreiecks sind:

$y = \frac{7}{5}x + 10\frac{2}{5}, \quad y = -\frac{4}{13}x + \frac{2}{13}, \quad y = -\frac{11}{8}x + 21\frac{1}{2}.$

Aufl. (6, 4).

27) Gegeben das Dreieck $M_1(4, 6)$, $M_2(8, 2)$, $M_3(10, 12)$. Durch jeden Eckpunkt wird eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite gezogen; es sollen die Koordinaten der Ecken des von diesen letzteren Geraden gebildeten Dreiecks gefunden werden.

Aufl. (2, —4), (6, 16), (14, 8).

28) Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks sind:

$$y = \frac{2}{11}x + 7\frac{5}{11}$$
$$y = \frac{19}{2}x - 123$$
$$y = -\frac{4}{19}x - 6\frac{9}{19}$$
$$y = -11x - 82.$$

Es sollen die Koordinaten des Durchschnittes der beiden Diagonalen des Vierecks bestimmt werden.

Antw. (0, 0).

29) Wie heisst die Gleichung der Verbindungslinie der Mitten der beiden Diagonalen des vorigen Vierecks?

Antw. $y = 2\frac{2}{3}x - 6\frac{5}{6}$.

30) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$y = ax + b$$
und $$y = a_1x + b_1$$

mit dem Anfangspunkt verbindet.

Antw. $y = \frac{ab_1 - a_1b}{b_1 - b} \cdot x.$

31) Durch den Punkt $P(14, 6)$ werden Ecktransversalen zu dem Dreieck $M_1(4, 4)$, $M_2(16, 20)$, $M_3(22, -6)$ gezogen. — Wo treffen dieselben die Seiten des Dreiecks?

Antw. M_1P schneidet M_2M_3 im Punkte (19, 7),
M_2P „ M_1M_3 „ „ (13, —1),
M_3P „ M_1M_2 „ „ (10, 12).

32) Es soll das Verhältnis ermittelt werden, nach welchem die gerade Verbindungslinie der Punkte $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$ von der die beiden Punkte $M_3(x_3y_3)$, $M_4(x_4y_4)$ verbindenden Geraden geteilt wird. —



Aufl. Sind xy die Koordinaten des Schnittpunktes Q und wird das Verhältnis der Abschnitte M_1Q und M_2Q durch k bezeichnet, so ist nach (I, 8):

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Da nun der Punkt Q auch auf der Geraden M_3M_4 liegt, so müssen seine Koordinaten der Gleichung derselben, nämlich:

$$\frac{y - y_3}{y_4 - y_3} = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$$

genügen. — Setzt man für x und y die obigen Koordinaten des Punktes Q ein, so folgt hieraus

$$k = \frac{(y_1 - y_3)(x_4 - x_3) - (y_4 - y_3)(x_1 - x_3)}{(x_2 - x_3)(y_4 - y_3) - (x_4 - x_3)(y_2 - y_3)},$$

oder auch $$k = \frac{y_1(x_4 - x_3) + y_3(x_1 - x_4) + y_4(x_3 - x_1)}{y_2(x_3 - x_4) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_2 - x_3)}.$$

Mit Berücksichtigung der in I, 13 für die Fläche eines Dreiecks angegebenen Formeln findet man leicht, dass k das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Dreiecke $M_1M_3M_4$ und $M_2M_3M_4$ ist.

33) Die Grösse des Winkels φ zu bestimmen, welchen die beiden Geraden

$$y = ax + b$$
$$y = mx + n$$

miteinander bilden.

Aufl. Sind α und β die Neigungswinkel der gegebenen Geraden gegen die Abscissenachse, so ist nach 1) d. Abschn. $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = m$. Der Winkel φ ist gleich $\alpha - \beta$, also $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ $= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$. Setzt man für $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ ihre Werte in diese Gleichung, so folgt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a - m}{1 + am}.$$

Ist $a = m$, so folgt hieraus $\varphi = 0$, d. h. die gegebenen Geraden sind parallel. Wenn aber $1 + am = 0$ oder $am = -1$ ist, so wird $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, $\varphi = 90°$; in diesem Falle stehen die Geraden senkrecht zu einander. —

34) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch den Punkt $M(6, 12)$ geht und senkrecht zu der Geraden $y = \frac{2}{3}x + 4$ steht.

Aufl. $y = -\frac{3}{2}x + 21$.

35) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch den Punkt $M(x_1 y_1)$ geht und senkrecht steht zu der Geraden $y = ax + b$.

Aufl. $y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1)$.

36) Den Abstand des Punktes $M(0, 15)$ von der Geraden $y = \frac{3}{4}x + 5$ zu finden. Antw. 8.

37) Den Abstand der beiden parallelen Geraden

$$y = \tfrac{5}{12}x + 15$$
$$y = \tfrac{5}{12}x - 11$$

voneinander zu bestimmen.

Aufl. 24.

38) Die Gleichungen der drei Höhenperpendikel des Dreiecks $M_1(4, 4)$, $M_2(12, 16)$, $M_3(20, 8)$ und die Koordinaten des Durchschnittes derselben zu bestimmen.

Antw. Die Koordinaten des Durchschnittes sind $(12\frac{4}{5},\ 12\frac{4}{5})$.

39) Für dasselbe Dreieck die Koordinaten des Durchschnittes der Senkrechten in den Mitten der Seiten (Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises) zu finden.

Antw. $11\frac{3}{5}$, $7\frac{3}{5}$.

40) Nachzuweisen, dass die in 38) und 39) gefundenen Punkte mit dem Durchschnitt der drei Mittellinien des Dreiecks in einer Geraden liegen.

Anl. Man stelle die Gleichung der Geraden auf, welche durch zwei dieser Punkte geht, und zeige, dass die Koordinaten des dritten Punktes dieser Gleichung genügen. —

41) Nimmt man den Eckpunkt A des Dreiecks ABC als Koordinatenanfang und die Seite AC als Abscissenachse, so sind die Koordinaten der Ecken des Dreiecks $A(0, 0)$, $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha_1, 0)$. Es sollen die Koordinaten des Mittelpunktes des umbeschriebenen Kreises, des Durchschnittes der drei Mittellinien, und die des Durchschnittes der drei Höhen bestimmt, und nachgewiesen werden, dass diese drei Punkte in einer Geraden liegen. —

Antw. Die Koord. der drei Punkte sind $\left(\frac{\alpha_1}{2},\ \frac{\alpha_1\alpha - \alpha^2 + \beta^2}{2\beta}\right)$, $\left(\frac{\alpha + \alpha_1}{3},\ \frac{\beta}{3}\right)$, $\left(\alpha,\ \frac{\alpha\alpha_1 - \alpha^2}{\beta}\right)$.

42) Die Gleichung jeder Geraden lässt sich auf die allgemeinere Form

$$ax + by + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

bringen. — Ist z. B. die Gleichung

$$y = \frac{3}{4} x + 6$$

gegeben, und schafft man nach Multiplikation der Gleichung mit 4 alles auf eine Seite, so heisst die neue Gleichung:

$$3x - 4y + 24 = 0.$$

Dividiert man in Gleichung α) beiderseitig durch c so erhält man die Gleichung der Geraden auch in der Form:

$$ux + vy + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

wenn $\frac{a}{c} = u$, $\frac{b}{c} = v$ gesetzt wird.

Die Gleichungen α) oder β) sind für gewisse Arten von Aufgaben über gerade Linien geeignet, die Lösungen einfacher und eleganter zu gestalten. —

Die Gerade $\qquad ax + by + c = 0$

schneidet auf der Abscissenachse die Strecke $-\frac{c}{a}$, auf der Ordinatenachse die Strecke $-\frac{c}{b}$ ab. — Sie bildet mit der Abscissenachse einen Winkel, dessen trig. Tangente $= -\frac{a}{b}$ ist.

43) Wann sind die beiden Geraden

$$ax + by + c = 0$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

parallel?

Antw. Wenn $ab_1 - a_1 b = 0$ oder $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$

44) Den Winkel φ zu bestimmen, welchen die beiden Geraden $ax + by + c = 0$, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ miteinander bilden.

Antw. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{ab_1 - a_1 b}{aa_1 + bb_1}$.

Ist der Zähler $= 0$ so ist $\varphi = 0$ d. h. die Geraden sind parallel (s. vor. Aufgabe). Ist der Nenner $aa_1 + bb_1 = 0$, so ist $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, $\varphi = 90°$; die Geraden stehen senkrecht aufeinander. — Die letztere Bedingung lässt sich auch schreiben $\begin{vmatrix} a & b \\ -b_1 & a_1 \end{vmatrix} = 0.$

45) Die Koordinaten des Durchschnittes der beiden Geraden

$$ax + by + c = 0$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

anzugeben.

Antw. $$\frac{\begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \quad -\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c - ac_1}{ab_1 - a_1b}.$$

(Das Verschwinden des gemeinschaftlichen Nenners drückt aus, dass die Koordinaten des Durchschnittes unendlich gross, also die Geraden parallel sind, s. 43).

46) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch den Punkt $M(x_1 y_1)$ geht und α) parallel, β) senkrecht zur Geraden $ax + by + c = 0$ ist.

Antw. α) $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$

oder: $$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ b, & -a, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

β) $a(y - y_1) - b(x - x_1) = 0$

oder: $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

47) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch die beiden Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$ geht.

Antw. $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

48) Die Gleichungen der drei Seiten des Dreiecks $M_1(4, 5)$, $M_2(12, 18)$, $M_3(20, 3)$ nach der vor. Formel zu finden.

Antw. $13x - 8y - 12 = 0$, $x + 8y - 44 = 0$,
$15x + 8y - 324 = 0$.

49) Die Bedingung anzugeben, welche ausdrückt, dass die drei Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$, $M_3(x_3 y_3)$ in gerader Linie liegen.

Aufl. Die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden Punkte $M_2(x_2 y_2)$, $M_3(x_3 y_3)$ geht, ist nach 47)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soll nun M_1 auf dieser Geraden liegen, so müssen die Koordinaten $x_1 y_1$ der Gleichung genügen. — Hieraus folgt die gesuchte Bedingung:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

s. (I, 13).

50) Multipliciert man die Gleichung der Geraden

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

mit einem beliebigen Faktor k und addiert sie alsdann zu der Gleichung

$$ax + by + c = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

einer zweiten Geraden, so erhält man die neue Gleichung:

$$ax + by + c + k(a_1x + b_1y + c_1) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (\gamma)$$

oder auch $(a + ka_1)x + (b + kb_1)y + c + kc_1 = 0$.

Dies ist aber wieder die Gleichung einer Geraden. — Diejenigen Werte von x und y welche den Gleichungen (α) und (β) zugleich genügen, werden, in (γ) eingesetzt, die linke Seite der Gleichung ebenfalls zu Null machen. — Diese Werte von x und y sind aber die Koordinaten des Durchschnittes der beiden durch (α) und (β) gegebenen Geraden; folglich stellt (γ) die Gleichung einer neuen Geraden vor, welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden (α) und (β) geht. —

Es soll hiernach die Gleichung der Geraden gefunden werden, welche den Punkt M(4, 6) mit dem Schnittpunkt der beiden Geraden

$$3x + 6y - 8 = 0$$
$$x - 2y + 4 = 0$$

verbindet.

Aufl. Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden geht, ist:

$$3x + 6y - 8 + k(x - 2y + 4) = 0. \quad . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

Soll die Gerade durch M gehen, so müssen die Koordinaten von M dieser Gleichung genügen. — Dies giebt:

$$40 - 4k = 0$$

woraus $k = 10$ folgt. — Setzt man diesen Wert von k in die Gleichung (δ) ein, so erhält man als Gleichung der gesuchten Geraden:

$$13x - 14y + 32 = 0.$$

51) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$2x + y - 20 = 0$$
$$3x - 2y - 2 = 0$$

und: 1) durch den Anfangspunkt geht, 2) parallel zur Abscissenachse, 3) parallel zur Ordinatenachse ist.

Antw. 1) $4x - 3y = 0$, 2) $y = 8$, 3) $x = 6$.

52) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$2x - 3y + 9 = 0$$
$$8x - 5y + 1 = 0$$

geht, und 1) parallel, 2) senkrecht zu der Geraden

$$2x - 5y + 6 = 0$$

ist. —

Antw. 1) $2x - 5y + 19 = 0$, 2) $5x + 2y - 25 = 0$.

53) Die Gleichungen der Höhenperpendikel des Dreiecks zu finden, welches von den drei Geraden

$$y + x - 12 = 0$$
$$6y - 5x - 28 = 0$$
$$2y - 9x + 108 = 0,$$

gebildet wird.

Antw. $y - x - 2 = 0$, $5y + 6x - 72 = 0$, $9y + 2x - 80 = 0$.

54) Wie heisst die Gleichung der Geraden, welche den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$ax + by + c = 0$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

mit dem Punkt $M(x_1 y_1)$ verbindet?

Antw. $$\begin{vmatrix} (ax + by + c), & (a_1 x + b_1 y + c_1) \\ (ax_1 + by_1 + c), & (a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1) \end{vmatrix} = 0.$$

55) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

geht, und 1) parallel, 2) senkrecht zu der Geraden

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \quad \text{ist.}$$

Antw. 1) $$\begin{vmatrix} (a_1 x + b_1 y + c_1), & (a_2 x + b_2 y + c_2) \\ (a_3 b_1 - a_1 b_3), & (a_3 b_2 - a_2 b_3) \end{vmatrix} = 0;$$

2) $$\begin{vmatrix} (a_1 x + b_1 y + c_1), & (a_2 x + b_2 y + c_2) \\ (a_1 a_3 + b_1 b_3), & (a_2 a_3 + b_2 b_3) \end{vmatrix} = 0.$$

56) Sind

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

die Gleichungen von drei Geraden, und lassen sich drei Zahlen k_1, k_2, k_3 so bestimmen, dass

$$k_1(a_1 x + b_1 y + c_1) + k_2(a_2 x + b_2 y + c_2) + k_3(a_3 x + b_3 y + c_3) \equiv 0$$

so gehen die drei Geraden durch einen Punkt. — Denn aus der letzten Gleichung folgt:

$$k_1(a_1x + b_1y + c_1) \equiv -[k_2(a_2x + b_2y + c_2) + k_3(a_3x + b_3y + c_3)].$$

Diejenigen Werte von x und y, welche den beiden Gleichungen

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

zugleich genügen, müssen hiernach auch die linke Seite der Gleichung der ersten Geraden $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ zu Null machen. —

Die Bedingung, dass die drei Geraden durch einen Punkt gehen, lässt sich auch noch anders ausdrücken. — Es muss nämlich in diesem Falle Werte von x und y geben, welche allen drei Gleichungen zugleich genügen, was nur möglich ist, wenn

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

57) Nachzuweisen, dass die drei Mittellinien des Dreiecks $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$, $M_3(x_3y_3)$ durch einen Punkt gehen.

Aufl. Die Koordinaten der Mitte zwischen M_2 und M_3 sind: $\frac{x_2+x_3}{2}$, $\frac{y_2+y_3}{2}$; folglich heisst die Gleichung der durch M_1 gehenden Mittellinie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \frac{x_2+x_3}{2}, & \frac{y_2+y_3}{2}, & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder auch: } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2+x_3, & y_2+y_3, & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung dieser Mittellinie lässt sich auch so schreiben:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso findet man als Gleichungen der beiden anderen Mittellinien:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad -\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Da diese drei Gleichungen zur Summe identisch Null geben, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt. —

58) Zu beweisen, dass die 3 Höhenperpendikel eines Dreiecks durch einen Punkt gehen.

59) Nachzuweisen, dass die in den Mitten der Seiten eines Dreiecks zu denselben errichteten Senkrechten durch einen Punkt gehen. —

60) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$ax + by + c = 0$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

mit dem Schnittpunkt der Geraden

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$
$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$$

verbindet. —

Antw. Ist $ax + by + c + k(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$ die gesuchte Gleichung, so ist k zu bestimmen aus der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a + ka_1, & b + kb_1, & c + kc_1 \\ \alpha \quad , & \beta \quad , & \gamma \\ \alpha_1 \quad , & \beta_1 \quad , & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0.$$

61) Die Gleichungen der Diagonalen des Vierseits zu finden, welches von den Geraden $x = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x + 4y - 16 = 0$, $x - 6y - 12 = 0$ gebildet wird. —

Antw. $7x - 72y - 72 = 0$, $5x - 4y - 8 = 0$, $31x - 6y + 24 = 0$.

62) Gegeben die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks:

$$2x - y + 4 = 0$$
$$3x + 4y - 80 = 0$$
$$y = 0$$

und der Punkt M(12, 4). — Vom M wird auf jede Seite des gegebenen Dreiecks ein Lot gefällt; man soll die Gleichungen der Geraden finden, welche die Fusspunkte der Lote miteinander verbinden.

Antw. $405y + 10x - 3588 = 0$, $12y + 11x - 132 = 0$,
$21y - 53x + 636 = 0$.

Normalform der Gleichung einer Geraden.

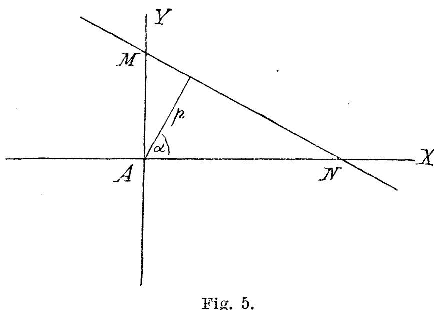


Fig. 5.

63) Bezeichnet man die Länge der vom Anfangspunkt auf die Gerade MN, Fig. 5 gefällten Senkrechten mit p, und den Winkel, welchen die letztere mit der Abscissenachse bildet mit α, dann sind die Koordinaten von $M\left(0, \frac{p}{\sin\alpha}\right)$, und die von

$N\left(\frac{p}{\cos\alpha}, 0\right)$. — Hieraus findet man als Gleichung der Geraden MN:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Diese, für die Lösung vieler Aufgaben bequeme Form der Gleichung einer Geraden wird die Normalform derselben genannt.

Die Gleichung $ax + by + c = 0$ hat die Normalform im allgemeinen nicht. — Man kann aber einen Faktor q so bestimmen, dass diese Gleichung durch Multiplikation mit demselben in die Normalform übergeht. Hierzu ist erforderlich, dass $qa = \cos\alpha$, $qb = \sin\alpha$ wird. — Aus diesen beiden Gleichungen findet man leicht:

$$q = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Die Gleichung $ax + by + c = 0$ wird demnach durch Division mit $\sqrt{a^2 + b^2}$ auf die Normalform:

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

gebracht. — Es ist hierin $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\alpha$ und die Konstante $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ bedeutet den Abstand der Geraden vom Anfangspunkt. —

Um den Abstand des Punktes $M_1(x_1y_1)$ von der Geraden

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

zu bestimmen, lege man durch M eine Parallele zu derselben. Ist d der Abstand dieser Geraden von der gegebenen Geraden (α), so hat sie vom Anfangspunkt die Entfernung $p + d$, und folglich ist ihre Gleichung:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - (p + d) = 0.$$

Die Bedingung, welche ausdrückt, dass diese Gerade durch M geht, heisst:

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - (p + d) = 0,$$

woraus folgt: $\quad d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p.$

Dies ist aber zugleich der Abstand des Punktes M von der gegebenen Geraden. — Der Ausdruck für d zeigt, dass man zur Bestimmung des gesuchten Abstandes die Koordinaten des gegebenen Punktes nur in die Normalform der Gleichung der gegebenen Geraden einzusetzen hat. — Der Betrag der linken Seite giebt alsdann den Abstand. — Wird die linke Seite zu Null, so liegt der Punkt auf der Geraden. —

64) Wie gross ist der Abstand der Geraden $3x - 4y + 20 = 0$ vom Anfangspunkt? Antw. 4.

65) Wie gross ist der Abstand der beiden parallelen Geraden

$$5x - 12y + 216 = 0$$
$$5x - 12y - 96 = 0$$

voneinander? Antw. 24.

66) Den Abstand des Punktes $M(12, 18)$ von der Geraden $5x - 12y = 0$ zu bestimmen. Antw. 12.

67) Wie gross ist der Abstand des Punktes $(0, 25)$ von der Geraden $y = \frac{3}{4}x - 5$? Antw. 24.

68) Wie gross sind die drei Höhen des Dreiecks $M_1(4, 6)$, $M_2(12, 18)$, $M_3(24, 10)$? Antw. $4\sqrt{13}$, $2\sqrt{26}$, $4\sqrt{13}$.

69) Ebenso bestimme man die drei Höhen des Dreiecks, welches von den drei Geraden

$$7x - 6y + 34 = 0$$
$$5x + 3y - 34 = 0$$
$$2x - 9y - 34 = 0$$

eingeschlossen wird.

Man findet: $\frac{6}{5}\sqrt{85}$, $3\sqrt{34}$, $\frac{6}{5}\sqrt{85}$.

70) Sind $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$, $M_3(x_3y_3)$ die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks, so lässt sich der Flächeninhalt desselben auch in folgender Weise bestimmen. — Die Länge der Seite M_2M_3 ist $= \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$; um noch die zugehörige Höhe zu finden, bildet man die Gleichung der Geraden M_2M_3, nämlich:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Koeffizienten von x und y in dieser Gleichung sind: $y_2 - y_3$, $-(x_2 - x_3)$, und hieraus ergiebt sich die Normalform der Gleichung:

$$\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} = 0.$$

Der Abstand h des dritten Eckpunktes $M_1(x_1y_1)$ von M_2M_3 ist:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}$$

Multipliciert man diesen Ausdruck mit dem für M_2M_3 gefundenen Wert und dividiert durch 2, so findet man für die Fläche F des Dreiecks die Formel:

$$F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

71) Berechne hiernach den Inhalt des Dreiecks: $M_1(-6, -8)$, $M_2(4, 12)$, $M_3(20, -10)$. Antw. 270.

72) Ebenso den Inhalt des Vierecks: $M_1(2, 10)$, $M_2(8, 4)$, $M_3(16, 18)$, $M_4(20, 6)$. Antw. 142.

73) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch den Punkt $M_1(x_1y_1)$ geht, und parallel der Geraden ist, welche die Punkte $M_2(x_2y_2)$, $M_3(x_3y_3)$ verbindet. —

Aufl. Ist $P(xy)$ ein beliebiger Punkt der gesuchten Geraden, so ist die Fläche des Dreiecks PM_2M_3 der Fläche des Dreiecks $M_1M_2M_3$ gleich. Man hat demnach als Gleichung der gesuchten Geraden:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

oder durch Vereinigung der beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1, & 0 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

74) Wie heissen die Gleichungen der Seiten desjenigen Dreiecks, dessen Seiten durch je einen der Punkte $M_1(-5, 4)$, $M_2(6, 12)$, $M_3(16, -3)$ gehen und parallel zu den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks $M_1M_2M_3$ sind?

Antw. $3x + 2y + 7 = 0$, $x + 3y - 42 = 0$,
$8x - 11y - 161 = 0$.

75) Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind: $M_1(4, 8)$, $M_2(16, 16)$, $M_3(22, 6)$. Verbindet man den innerhalb dieses Dreiecks liegenden Punkt P mit M_1, M_2 und M_3 durch gerade Linien, so zerfällt dasselbe in 3 gleich grosse Dreiecke. Welches sind die Koordinaten von P?

Antw. (14, 10).

76) Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn die Koordinaten der Eckpunkte des gegebenen Dreiecks sind: $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$, $M_3(x_3y_3)$.

Aufl. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes P mit x und y, so folgt aus der Gleichheit der Dreiecke M_1M_2P, M_1M_3P, M_2M_3P:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind x und y zu bestimmen. — Vertauscht man in der ersten Gleichung die beiden letzten Horizontalreihen der rechts stehenden Determinante, so geht die Gleichung über in:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Da beide Determinanten in der ersten und letzten Horizontalreihe übereinstimmen, so können sie vereinigt werden. — Hierdurch entsteht die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x & , y & , 1 \\ x_1 + x_3, & y_1 + y_3, & 2 \\ x_2 & , y_2 & , 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Addiert man noch die letzte Horizontalreihe zur zweiten, und dividiert dann beide Seiten der Gleichung durch 3, so folgt:

$$\begin{vmatrix} x & , y & , 1 \\ \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, & \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, & 1 \\ x_2 & , y_2 & , 1 \end{vmatrix} = 0.$$

In gleicher Weise kann die zweite der Gleichungen (α) auf die Form

$$\begin{vmatrix} x & , y & , 1 \\ x_1 & , y_1 & , 1 \\ \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, & \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

gebracht werden. — Der Anblick beider Gleichungen zeigt sofort, dass denselben die Werte

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

genügen, da durch Substitution derselben in beiden Determinanten zwei gleiche parallele Reihen entstehen. —

77) Drei Strecken M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6, sind durch die Koordinaten ihrer Endpunkte gegeben, und zwar: $M_1(8, 4)$, $M_2(2, 6)$; $M_3(6, 16)$, $M_4(16, 20)$; $M_5(20, 8)$, $M_6(12, 4)$. Es sollen drei inhaltsgleiche Dreiecke mit gemeinschaftlicher Spitze bestimmt werden, deren Grundlinien die gegebenen Strecken sind. — Welches sind die Koordinaten der gemeinschaftlichen Spitze?

Antw. $13\frac{13}{23}$, $12\frac{16}{23}$.

78) Die Fläche des Dreiecks zu bestimmen, welches von den drei Geraden

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

eingeschlossen wird. —

Aufl. Bezeichnet man in der Determinante dieser Gleichungen die Koeffizienten der Elemente mit den entsprechenden grossen Buchstaben und denselben Zeigern, so findet man für die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks die Werte:

$$\left(\frac{A_1}{C_1}, \frac{B_1}{C_1}\right), \quad \left(\frac{A_2}{C_2}, \frac{B_2}{C_2}\right), \quad \left(\frac{A_3}{C_3}, \frac{B_3}{C_3}\right).$$

Setzt man diese Koordinaten in die in 70) entwickelte Formel für die Fläche F, so erhält man:

$$F = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{A_1}{C_1}, & \frac{B_1}{C_1}, & 1 \\ \frac{A_2}{C_2}, & \frac{B_2}{C_2}, & 1 \\ \frac{A_3}{C_3}, & \frac{B_3}{C_3}, & 1 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \\ A_3 B_3 C_3 \end{vmatrix}}{2 \cdot C_1 C_2 C_3.}$$

Die Zählerdeterminante ist die adjungierte der Determinante der drei Gleichungen (α) und folglich das Quadrat derselben. — Setzt man auch für C_1, C_2, C_3 ihre Werte ein, so erhält man für die gesuchte Fläche folgende Formel:

$$F = \frac{\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}^2}{2\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix}}.$$

Die Fläche ist Null, wenn die Zählerdeterminante verschwindet. In diesem Falle gehen die drei Geraden durch einen Punkt. —

Wird aber eine der Nennerdeterminanten zu Null, so wird F unendlich. In diesem Falle sind zwei der gegebenen Geraden parallel. —

79) Wie gross ist die Fläche des von den drei Geraden $2x - y + 4 = 0$, $x + 13y + 110 = 0$, $11x + 8y - 140 = 0$ eingeschlossenen Dreiecks?

Antw. 270.

80) Bestimme ebenso den Inhalt des, von den Geraden $2x - y = 0$, $x - 3y = 0$, $x + 2y - 40 = 0$ gebildeten Dreiecks.

Antw. 160.

81) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind:

$$7x - 4y - 4 = 0, \quad x - 10y + 56 = 0, \quad x + y - 32 = 0.$$

Verbindet man den innerhalb dieses Dreiecks liegenden Punkt M(16, 12) mit den Ecken desselben, so zerfällt das Dreieck in drei andere Dreiecke, deren Inhalte zu bestimmen sind.

Antw. 60, 48, 24.

82) Ein Dreieck ist gegeben durch die Gleichungen seiner drei Seiten:

$$x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1 = 0$$
$$x \cos\alpha_2 + y \sin\alpha_2 - p_2 = 0$$
$$x \cos\alpha_3 + y \sin\alpha_3 - p_3 = 0.$$

Auf den Seiten liegen bez. die Strecken a, b und c; man soll die Koordinaten desjenigen Punktes P bestimmen, durch dessen Verbindungsgeraden mit den Endpunkten der Strecken a, b und c drei gleich grosse Dreiecke gebildet werden. —

Antw. Man findet für die Koordinaten x′ und y′ die Werte:

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} (ap_1 - bp_2) & , & (a \sin\alpha_1 - b \sin\alpha_2) \\ (ap_1 - cp_3) & , & (a \sin\alpha_1 - c \sin\alpha_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a \cos\alpha_1 - b \cos\alpha_2), & (a \sin\alpha_1 - b \sin\alpha_2) \\ (a \cos\alpha_1 - c \cos\alpha_3), & (a \sin\alpha_1 - c \sin\alpha_3) \end{vmatrix}},$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} (a \cos\alpha_1 - b \cos\alpha_2), & (ap_1 - bp_2) \\ (a \cos\alpha_1 - c \cdot \cos\alpha_3), & (ap_1 - cp_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a \cos\alpha_1 - b \cos\alpha_2), & (a \sin\alpha_1 - b \sin\alpha_2) \\ (a \cos\alpha_2 - c \cdot \cos\alpha_3), & (a \sin\alpha_1 - c \sin\alpha_3) \end{vmatrix}}.$$

83) Die vorige Aufgabe zu lösen, wenn die Gleichungen der drei Seiten des Dreiecks sind: $4x - 3y + 2 = 0$, $12x + 5y - 272 = 0$, $8x + 15y = 0$; die drei auf diesen Geraden liegenden Strecken haben bez. die Längen 10, 13, 17. —

Antw. Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind $68\frac{10}{21}$, $\frac{4}{21}$.

84) Die Gleichung der Halbierungslinie des Winkels der beiden Geraden

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$
$$x \cos \beta + y \sin \beta - p_1 = 0$$

zu finden.

Aufl. Ist $P(x'y')$ irgend ein Punkt der Halbierungslinie, so sind die Abstände dieses Punktes von den beiden gegebenen Geraden einander gleich. — Hiernach besteht zwischen x' und y' die Gleichung:

$$x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p = x' \cos \beta + y' \sin \beta - p_1.$$

Da diese Gleichung für jeden Punkt der Halbierungslinie gilt, so ist sie die gesuchte Gleichung. — Man kann auch statt x' und y' wieder x und y schreiben und alles auf die linke Seite bringen, wodurch die Gleichung die Form

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p - (x \cos \beta + y \sin \beta - p_1) = 0$$

annimmt.

Man erhält demnach die Gleichung der Halbierungslinie des Winkels zweier Geraden einfach durch Subtraktion der Normalformen der Gleichungen beider Geraden. —

85) Was bedeutet die Gleichung, welche man durch Addition der beiden Normalgleichungen zweier Geraden erhält?

86) Nachzuweisen dass die Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks sich in einem Punkte treffen. [Anwendung von (56).]

87) Ebenso zu beweisen, dass die Halbierungslinien zweier Aussenwinkel und des dritten inneren Winkels eines Dreiecks durch einen Punkt gehen. —

Linienkoordinaten.

88) Die Gleichung einer Geraden kann nach 42) d. Abschn. auch in folgender Form geschrieben werden:

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Bezeichnet man die von der Geraden auf der Abscissenachse bez. Ordinatenachse abgeschnittenen Strecken mit a und b so ist:

$$a = -\frac{1}{u}, \quad b = -\frac{1}{v} \text{ und umgekehrt } u = -\frac{1}{a}, \quad v = -\frac{1}{b}.$$

Die Koeffizienten u und v sind demnach die negativen reciproken Werte der Strecken, welche die Gerade auf den Koordinatenachsen abschneidet. Man nennt dieselben die Koordinaten der Geraden. — Um anzudeuten, dass eine Gerade P die Koordinaten u und v habe, schreibt man: „$P(u, v)$“. Zum Unterschiede von den bisher gebrauchten Punkt-

koordinaten x und y nennt man die Grössen u und v Linienkoordinaten. —

89) Die Gerade $P(\frac{1}{8}, -\frac{1}{5})$ zu zeichnen. — Welchen Winkel bildet dieselbe mit der Abscissenachse? Antw. $32^\circ 0' 19''$.

90) Den Neigungswinkel φ der Geraden $P(u, v)$ gegen die Abscissenachse zu finden. Antw. $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{u}{v}$.

91) Die beiden Geraden $P(0, \frac{1}{6})$ und $Q(-\frac{1}{4}, 0)$ zu zeichnen.

92) Die Koordinaten x und y des Durchschnittes der beiden Geraden $P_1(u_1 v_1)$, $P_2(u_2 v_2)$ zu bestimmen.

Antw. $x = \frac{v_1 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$, $y = \frac{u_2 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$.

93) Den Winkel φ zu bestimmen, welchen die beiden Geraden $P_1(u_1 v_1)$, $P_2(u_2 v_2)$ miteinander bilden.

Antw. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{u_1 u_2 + v_1 v_2}$.

94) Wann sind die beiden Geraden $P_1(u_1 v_1)$, $P(u_2 v_2)$ α) parallel? β) wann stehen sie senkrecht aufeinander?

Antw. α) wenn $u_2 v_1 - u_1 v_2 = 0$, oder $\begin{vmatrix} u_1 u_2 \\ v_1 v_2 \end{vmatrix} = 0$;

β) wenn $u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0$, oder $\begin{vmatrix} u_1 v_2 \\ -v_1 u_2 \end{vmatrix} = 0$.

95) Die Koordinaten der Geraden zu bestimmen, welche durch die beiden Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$ geht. —

Aufl. Die Gleichung der Geraden heisst:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man diese Determinante nach den Gliedern der ersten Horizontalreihe und dividiert durch das Absolutglied, so erhält man die Gleichung der Geraden in der Form:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \cdot x + \frac{x_2 - x_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \cdot y + 1 = 0,$$

woraus für die Koordinaten der Geraden folgt:

$$u = \frac{y_1 - y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad v = \frac{x_2 - x_1}{x_1 y_2 - x_2 y}.$$

96) Die Koordinaten der Seiten des Dreiecks $M_1(-4, 2)$, $M_2(14, 12)$, $M_3(20, -10)$ und der Mittellinien desselben zu finden.

Antw. Die Koordinaten der Seiten sind: $(\frac{5}{38}, -\frac{9}{38})$, (∞, ∞), $(-\frac{11}{190}, -\frac{3}{190})$ für die Mittellinien ergiebt sich: $(-\frac{1}{38}, -\frac{21}{38})$, $(-\frac{8}{76}, \frac{3}{76})$, $(-\frac{17}{190}, -\frac{3}{38})$.

97) Die Koordinaten der Geraden zu bestimmen, welche durch den Punkt $M(x_1 y_1)$ geht, und parallel zu der Geraden $P(u_1 v_1)$ ist.

Antw. $\left(-\frac{u_1}{u_1 x_1 + v_1 y_1}, -\frac{v_1}{u_1 x_1 + v_1 y_1}\right)$.

98) Den Abstand des Punktes $M(8, 10)$ von der Geraden $P(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ zu finden. Antw. $5\frac{3}{5}$.

99) Bestimme den Abstand des Punktes $M(x_1 y_1)$ von der Geraden $P(uv)$. Antw. $\frac{ux_1 + vy_1 + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

100) Wie gross ist der Abstand der Geraden $P(uv)$ vom Anfangspunkt? Antw. $\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

101) Wann gehen die drei Geraden $P_1(u_1 v_1)$, $P_2(u_2 v_2)$, $P_3(u_3 v_3)$ durch einen Punkt?

Antw. Wenn $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

102) Es sollen die Koordinaten der Halbierungslinie des Winkels der beiden Geraden $P_1(u_1 v_1)$, $P_2(u_2 v_2)$ bestimmt werden.

Antw. Man findet: $\frac{u_1\sqrt{u_2^2 + v_2^2} - u_2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2} - \sqrt{u_1^2 + v_1^2}}$,

$$\frac{v_1\sqrt{u_2^2 + v_2^2} - v_2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2} - \sqrt{u_1^2 + v_1^2}}.$$

103) Die Fläche des Dreiecks zu bestimmen, welches von den drei Geraden $P_1(u_1 v_1)$, $P_2(u_2 v_2)$, $P_3(u_3 v_3)$ eingeschlossen wird.

Antw. $F = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}^2}{2\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}}$.

104) Betrachtet man in der Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0$$

x und y als Veränderliche, u und v als Konstanten, so bedeutet die Gleichung eine Gerade, deren Koordinaten u und v sind. — Nimmt

man aber x und y als Konstanten, u und v als Veränderliche an, so lässt sich zu jedem willkürlich gewählten u ein Wert von v aus der obigen Gleichung bestimmen. Solche Werte von u und v welche der Gleichung Genüge leisten, kann man als Koordinaten einer Geraden betrachten, deren Gleichung, wenn man unter α und β die laufenden Punktkoordinaten versteht, sein würde:

$$u\alpha + v\beta + 1 = 0.$$

Da nun dieser Gleichung auch die Koordinaten x und y, an die Stelle von α und β gesetzt, genügen, so gehen alle möglichen Geraden, deren Koordinaten u und v die Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0$$

befriedigen, durch den Punkt (x, y). — Man nennt deshalb diese Gleichung (wenn x und y Konstanten sind) die Gleichung des Punktes (xy). So bestimmt nach dieser Auffassung die Gleichung

$$5u + 6v + 1 = 0,$$

den Punkt M(5, 6).

Es seien die Gleichungen zweier Punkte

$$4u + 8v + 1 = 0$$
$$12u + 18v + 1 = 0$$

gegeben. — Welches sind die Koordinaten der diese beiden Punkte verbindenden Geraden?

Antw. $(\frac{5}{12}, -\frac{1}{3})$.

105) Welches ist die Gleichung des Durchschnittspunktes der beiden Geraden $P_1(u_1 v_1)$, $P_2(u_2 v_2)$?

Antw. $\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Durch Entwickelung dieser Determinante erhält man:

$$u \cdot \frac{v_1 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} + v \frac{u_2 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} + 1 = 0;$$

Die Koeffizienten von u und v sind alsdann die Koordinaten des Durchschnittspunktes. —

106) Die Gleichungen von zwei Punkten sind:

$$\left.\begin{matrix} ux_1 + vy_1 + 1 = 0 \\ ux_2 + vy_2 + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Addiert man die zweite Gleichung, nachdem dieselbe mit einem beliebigen Faktor k multipliciert ist, zur ersten Gleichung, so erhält man

$$ux_1 + vy_1 + 1 + k(ux_2 + vy_2 + 1) = 0 \quad . \; . \; . \quad (\beta)$$

Diejenigen Werte von u und v, welche den Gleichungen (α) zugleich genügen, werden auch die linke Seite der Gleichung (β) zu Null machen. — Diese Werte von u und v bedeuten aber die Koordinaten der Geraden, welche durch die beiden Punkte $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ geht. — Da nun (β) aber die Gleichung eines Punktes M ist, so muss dieser Punkt auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte liegen. — Ordnet man die Gleichung (β) nach u und v und dividiert beiderseitig durch das Absolutglied, so heisst die Gleichung des Punktes M:

$$u\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}\right) + v\left(\frac{y_1 + ky_2}{1 + k}\right) + 1 = 0,$$

und man findet als Koordinaten von M:

$$\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad \frac{y_1 + ky_2}{1 + k},$$

woraus sich noch ergiebt, dass der Faktor k das Verhältnis der Abstände des Punktes M von den beiden gegebenen Punkten bedeutet. — (Vergl. I, 8.)

Ist $k = 1$, so erhält man für die Koordinaten des Punktes M die Werte: $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$. — Die Gleichung des Mittelpunktes zweier gegebenen Punkte ergiebt sich also durch einfache Addition der Gleichungen der beiden Punkte. — Ist $k = -1$, so werden die Koordinaten von M unendlich. — Durch Subtraktion der Gleichungen der gegebenen Punkte erhält man deshalb die Gleichung des unendlich fernen Punktes. —

107) Sind

$$\begin{aligned} ux_1 + vy_1 + 1 &= 0 \\ ux_2 + vy_2 + 1 &= 0 \\ ux_3 + vy_3 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen von drei Punkten, so liegen dieselben in einer Geraden, wenn u und v den drei Gleichungen zugleich genügen. Dies ist aber nur möglich, wenn:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ist. —

108) Die Gleichung des Punktes zu finden, in welchem die Gerade $P(-\frac{1}{40}, -\frac{1}{15})$ die Verbindungslinie der beiden Punkte

$$\begin{aligned} 4u + 9v + 1 &= 0 \\ 20u + 21v + 1 &= 0 \end{aligned}$$

schneidet. Antw. $8u + 12v + 1 = 0$.

109) Wie heisst die Gleichung des Punktes, in welchem die Gerade $P(u_1 v_1)$ die Verbindungslinie der beiden Punkte

$$ux_1 + vy_1 + 1 = 0$$
$$ux_2 + vy_2 + 1 = 0$$

schneidet?

Antw. $$\begin{vmatrix} (u\ x_1 + v\ y_1 + 1), & (u\ x_2 + v\ y_2 + 1) \\ (u_1 x_1 + v_1 y_1 + 1), & (u_1 x_2 + v_1 y_2 + 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Schiefwinklige Koordinatenachsen.

110) Es soll die Gültigkeit der für rechtwinklige Koordinaten angegebenen Gesetze (I, 5 und 8) nachgewiesen werden. —

111) Der Neigungswinkel der Koordinatenachsen sei φ. — Wie gross ist die Entfernung des Punktes $M(x_1 y_1)$ vom Anfangspunkt?

Antw. $\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2 x_1 y_1 \cos\varphi}$.

112) Wie gross ist die Entfernung der beiden Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$ voneinander?

Antw. $\sqrt{x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi}$.

113) Wie lang sind die Seiten des Dreiecks $M_1(4, 6)$, $M_2(10, 18)$, $M_3(20, 4)$ wenn $\varphi = 60°$ ist?

Antw. $M_1 M_2 = 6\sqrt{7}$, $M_2 M_3 = 2\sqrt{39}$, $M_1 M_3 = 2\sqrt{57}$.

114) Die Gleichung der Geraden hat für schiefwinklige Achsen dieselbe Form wie früher. — Man kann sie also entweder in der Form $y = ax + b$, oder $ax + by + c = 0$, oder $ux + vy + 1 = 0$ benutzen. — Ebenso sind die Erklärungen für Linienkoordinaten und Gleichung eines Punktes für schiefwinklige Achsen gültig. — Die Formeln für Längenbestimmungen sind in der Regel verwickelter, als bei rechtwinkligen Koordinaten; in den folgenden Aufgaben sind deshalb nur Lagenbeziehungen berücksichtigt, für welche die Wahl schiefwinkliger Achsen häufig von Vorteil ist. —

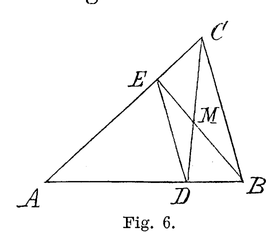


Fig. 6.

Als erstes Beispiel diene die folgende Aufgabe:

Zu der Seite BC des Dreiecks ABC (Fig. 6) ist eine Parallele DE gezogen. Man sucht den geometrischen Ort des Schnittpunktes M der beiden Geraden CD und BE. —

Aufl. Man nehme AB als Abscissenachse, AC als Ordinatenachse an. Ist nun $AB = a$, $AC = b$ so kann man setzen: $AD = k \cdot a$, $AE = k \cdot b$, wenn k ein beliebiger Pro-

portionalitätsfaktor ist. — Bezeichnet man nun $-\frac{1}{a}$ mit u, ferner $-\frac{1}{b}$ mit v, und folglich: $-\frac{1}{ka}$ mit $\frac{u}{k}$, $-\frac{1}{kb}$ mit $\frac{v}{k}$, so heissen die Gleichungen der beiden Geraden BE und CD bez.:

$$ux + \frac{v}{k} y + 1 = 0$$

$$\frac{u}{k} x + vy + 1 = 0$$

oder auch:

$$(ux + 1) k + vy = 0$$
$$(vy + 1) k + ux = 0.$$

Für die Koordinaten des Durchschnittspunktes M beider Geraden müssen diese Gleichungen zusammen bestehen. — Um dieselben von der Lage der zu BC gezogenen Parallelen DE frei zu machen, ist k zu eliminieren, wodurch man als Gleichung des gesuchten Ortes erhält:

$$\begin{vmatrix} (ux + 1), & vy \\ (vy + 1), & ux \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Entwickelung dieser Determinante und Reduktion erhält man:

$$ux + vy = 0.$$

Der Ort ist demnach eine Gerade, welche durch den Anfangspunkt A geht.

Anm. Es ist noch zu zeigen, dass der bei der Reduktion beseitigte Faktor nicht in Betracht kommt, ferner, dass die gefundene Gerade eine Mittellinie des Dreiecks ABC ist. —

115) Durch einen beliebigen Punkt M der Diagonale AC des Parallelogramms ABCD (Fig. 7) zieht man die beiden Geraden EF || AB und GH || BC. — Welches ist die Gleichung des geometrischen Ortes vom Punkte P, in welchem sich die Geraden EH und FG schneiden? —

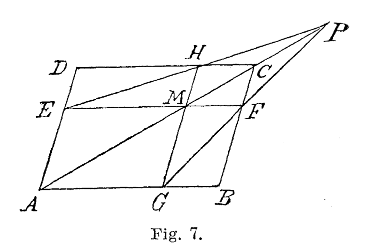


Fig. 7.

Aufl. Nimmt man AB als Abscissenachse, AD als Ordinatenachse und setzt: AB = a und AD = b, so findet man als Gleichung des Ortes: $bx - ay = 0$.

Diese Gleichung bedeutet eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade, welche mit der Diagonale AC zusammenfällt. — P liegt also stets auf der Verlängerung von AC. —

116) Die Spitze C eines Dreiecks ABC bewegt sich auf der Geraden $m(y - b) + nx = 0$. — Den Ort des Durchschnittes der Mittellinien des Dreiecks ABC zu finden.

Aufl. Nimmt man AB als Abscissenachse, AC als Ordinatenachse, und ist $AB = a$, $AC = b$, so findet man als Gleichung des Ortes
$$m(3y - b) + n(3x - a) = 0.$$
Der gesuchte Ort ist also eine Gerade. —

117) Es sei BCDE (Fig. 8) ein beliebiges Viereck. — In Bezug auf AB als Abscissenachse, CD als Ordinatenachse (der Anfangspunkt A ist hiernach der Schnittpunkt von CD und BE) sei die Gleichung der Geraden BC:

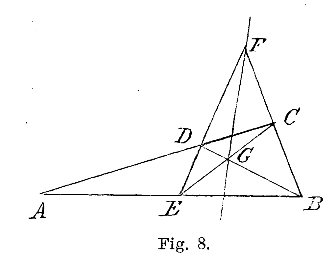


Fig. 8.

$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0 \quad . \quad . \quad (\alpha)$$
ferner die Gleichung der Geraden DE:
$$u_2 x + v_2 y + 1 = 0 \quad . \quad . \quad (\beta)$$
Es soll hieraus die Gleichung der Geraden gefunden werden, welche den Durchschnitt G der beiden Diagonalen BD und CE mit dem Schnittpunkt F der beiden Seiten DE und BC verbindet.

Aufl. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von u_1, v_1 und u_2, v_2 ergiebt sich leicht die Gleichung der Diagonale BD:
$$u_1 x + v_2 y + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$
ebenso die Gleichung von CE:
$$u_2 x + v_1 y + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$
Addiert man die Gleichungen (α) und (β), so folgt:
$$(u_1 + u_2)x + (v_1 + v_2)y + 2 = 0.$$
Dies ist die Gleichung einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt von BC und DE geht. — Da nun die Addition von (δ) und (γ) dieselbe Gleichung liefert, so geht diese Gerade auch durch den Schnittpunkt von BD und CE. —

118) Zwei feste Geraden AB und AC werden von zwei anderen Geraden, welche stets durch einen festen Punkt F gehen, in den Punkten C, D, B und E geschnitten (vergl. Fig. 8). — Es soll der geometrische Ort des Durchschnittspunktes G der Verbindungslinien BD und CE gefunden werden. —

Aufl. Es seien AC und AB die Koordinatenachsen; A der Anfangspunkt und $x_1 y_1$ die Koordinaten von F. — Die Gleichung der Geraden BF sei:
$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0$$

und die Gleichung von EF:

$$u_2 x + v_2 y + 1 = 0.$$

Wie in 117) ergeben sich hieraus die Gleichungen der beiden Geraden BD und CE:

$$u_1 x + v_2 y + 1 = 0$$
$$u_2 x + v_1 y + 1 = 0.$$

Die Koordinaten des Punktes G müssen den letzteren Gleichungen und folglich auch der Differenz derselben:

$$(u_1 - u_2)\,x - (v_1 - v_2)\,y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

genügen. — Die beiden Geraden BF und EF gehen durch F, wenn:

$$u_1 x_1 + v_1 y_1 + 1 = 0$$
$$u_2 x_1 + v_2 y_1 + 1 = 0.$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen voneinander, so folgt:

$$(u_1 - u_2)\,x_1 + (v_1 - v_2)\,y_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Durch Elimination von u_1, v_1, u_2, v_2 aus (1) und (2) erhält man als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$\begin{vmatrix} x\,, & -y \\ x_1\,, & y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{y_1}{x_1} \cdot x$$

welche Gleichung eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade vorstellt. —

119) Drei Geraden bewegen sich parallel mit sich selbst so, dass zwei ihrer Schnittpunkte zwei feste Geraden durchlaufen. Es soll der Ort des dritten Schnittpunktes gefunden werden.

Antw. Der gesuchte Ort ist eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt der beiden festen Geraden geht. —

120) Liegen die Ecken zweier Dreiecke auf drei durch denselben Punkt gehenden Geraden, so liegen die Durchschnittspunkte der zwischen je zwei dieser Geraden enthaltenen Seitenpaare in gerader Linie. —

121) Zwei Eckpunkte eines Dreiecks durchlaufen zwei feste Geraden G_1 und G_2, und die drei Seiten des Dreiecks drehen sich um drei in einer Geraden liegende feste Punkte. — Zu beweisen, dass der Ort der dritten Ecke eine durch den Schnittpunkt von G_1 und G_2 gehende Gerade ist. —

Abgekürzte Bezeichnung der Gleichung einer Geraden oder eines Punktes.

122) Die linke Seite der Gleichung einer Geraden $ax + by + c = 0$ oder $ux + vy + 1 = 0$ soll im folgenden durch G, die Gleichung also

kurz durch $G = 0$ ausgedrückt werden. — Die Normalform:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

deuten wir künftig einfach durch $\alpha = 0$ an. — Ebenso ersetzen wir die Gleichung des Punktes: $u x_1 + v y_1 + 1 = 0$
kürzer durch: $P = 0$.

Gesetze und Aufgaben über Lagenbeziehungen zwischen Geraden und Punkten finden in der Geometrie eine zweifache Deutung, weil bekanntlich Punkt und Gerade einander reciprok gegenüberstehen. Aus einem derartigen Gesetz leitet man das zweite ab, indem man die Ausdrücke Punkt und Gerade vertauscht. — Dem Schnittpunkte zweier Geraden entspricht die Verbindungslinie zweier Punkte.

Man pflegt reciproke Gesetze, Aufgaben und deren Lösungen einander gegenüber zu stellen, z. B.

Zwei Geraden bestimmen einen Punkt (Schnittpunkt).

Zwei Punkte bestimmen eine Gerade (Verbindungslinie).

Lagenbeziehungen zwischen Geraden und Punkten lassen sich analytisch am einfachsten durch die oben eingeführte abgekürzte Bezeichnung ausdrücken. Sind z. B.:

$$G = 0, \quad G_1 = 0$$

die Gleichungen zweier Geraden, dann bedeutet die Gleichung:

$$G + k G_1 = 0$$

die Gleichung einer neuen Geraden, welche durch den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden geht. (s. II, 50).

$$P = 0, \quad P_1 = 0$$

die Gleichungen von zwei Punkten, dann bedeutet die Gleichung:

$$P + k P_1 = 0$$

die Gleichung eines neuen Punktes, welcher auf der Verbindungslinie der beiden ersten Punkte liegt. (s. II, 106).

Folgende Aufgaben stehen einander ebenfalls reciprok gegenüber:

123) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche den Punkt $M(x_1 y_1)$ mit dem Durchschnittspunkt der beiden Geraden

$$G = 0, \quad H = 0$$

verbindet.

Aufl. Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden geht, ist:

$$G + k H = 0 \quad . \quad . \quad (a)$$

Die Gleichung des Punktes zu finden, in welchem die Gerade $R(u_1 v_1)$ die Verbindungslinie der beiden Punkte

$$P = 0, \quad Q = 0$$

schneidet.

Aufl. Die Gleichung eines Punktes, welcher auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte liegt, ist:

$$P + k Q = 0 \quad . \quad . \quad (a)$$

Soll diese Gerade durch M gehen, so müssen x_1 und y_1 der Gleichung (a) genügen. Bezeichnet man das Resultat der Substitution von x_1 und y_1 in G und H mit G_1 und H_1, so muss also sein:

$$G_1 + kH_1 = 0 \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Aus dieser Gleichung ist k zu bestimmen und in (a) einzusetzen, wodurch man als Gleichung der gesuchten Geraden erhält:

$$\begin{vmatrix} G\,, & H \\ G_1\,, & H_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder auch: $GH_1 - G_1H = 0$.
(Vergl. II, 50 u. 54).

Soll dieser Punkt auf R liegen, so müssen u_1 und v_1 der Gleichung (a) genügen. Bezeichnet man das Resultat der Substitution von u_1 und v_1 in P und Q mit P_1 und Q_1, so muss also sein:

$$P_1 + kQ_1 = 0 \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Aus dieser Gleichung ist k zu bestimmen und in (a) einzusetzen, wodurch man als Gleichung des gesuchten Punktes erhält:

$$\begin{vmatrix} P\,, & Q \\ P_1\,, & Q_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder auch: $PQ_1 - P_1Q = 0$.
(Vergl. II, 109).

124) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch die beiden Punkte $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$ geht.

Aufl. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Die Koordinaten dieser Geraden sind:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad \frac{x_2 - x_1}{x_1 y_2 - x_2 y_2}.$$

(s. II, 95).

Die Gleichung des Punktes zu finden, in welchem sich die beiden Geraden $P_1(u_1v_1)$, $P_2(u_2v_2)$ schneiden.

Aufl. $\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Die Koordinaten dieses Punktes sind:

$$\frac{v_1 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \quad \frac{u_2 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}.$$

(s. II, 105).

125) Sind

$G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$, $G_4 = 0$ die Gleichungen von vier Geraden, so lassen sich immer 4 Faktoren k_1, k_2, k_3, k_4, so bestimmen, dass:

$$k_1G_1 + k_2G_2 + k_3G_3 + k_4G_4 \equiv 0 \ (\alpha)$$

Diese Gleichung ist nur möglich, wenn die Koeffizienten von x, y und das Absolutglied einzeln Null sind.

Zur Bestimmung jener 4 Faktoren hat man deshalb:

Sind

$P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0$ die Gleichungen von vier Punkten, so lassen sich immer 4 Faktoren k_1, k_2, k_3, k_4, so bestimmen, dass:

$$k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3 + k_4P_4 \equiv 0 \ (\alpha)$$

Diese Gleichung ist nur möglich, wenn die Koeffizienten von u, v und das Absolutglied einzeln Null sind.

Zur Bestimmung jener 4 Faktoren hat man deshalb:

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + k_4u_4 = 0$$
$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$$
$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0.$$

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 = 0$$
$$k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 + k_4y_4 = 0$$
$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0.$$

Aus diesen drei homogenen Gleichungen lassen sich die Verhältnisse $\frac{k_1}{k_4}$, $\frac{k_2}{k_4}$, $\frac{k_3}{k_4}$ bestimmen, was vollständig genügt. —

Setzt man nun:
$k_1G_1 = G'$, $k_2G_2 = G''$, $k_3G_3 = G'''$, $k_4G_4 = G''''$, so heisst die Gleichung (α):

$$G' + G'' + G''' + G'''' \equiv 0 \quad (\beta)$$

während $G' = 0$, $G'' = 0$, $G''' = 0$, $G'''' = 0$ wieder die Gleichungen der ersten vier Geraden sind.

Die Gleichung $G' + G'' = 0$, welche, wie sich aus (β) ergiebt, auch so geschrieben werden kann:

$$-(G''' + G'''') = 0$$

bedeutet eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt von G' und G'', und nach der letzten Form ihrer Gleichung auch durch den Schnittpunkt von G''' und G'''' geht. —

Ebenso ist
$G' + G''' = 0$ oder $-(G'' + G'''') = 0$
die Gleichung der Geraden, welche sowohl durch den Schnittpunkt der Geraden

$$G' = 0, \quad G''' = 0$$

als auch durch den Schnittpunkt von

$$G'' = 0 \text{ und } G'''' = 0$$

geht, u. s. w.

126) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche den Schnittpunkt der beiden Geraden:

$$3x - 2y - 4 = 0$$
$$x + y - 8 = 0$$

Setzt man nun:
$k_1P_1 = P'$, $k_2P_2 = P''$, $k_3P_3 = P'''$, $k_4P_4 = P''''$, so heisst die Gleichung (α):

$$P' + P'' + P''' + P'''' \equiv 0 \quad (\beta)$$

während $P' = 0$, $P'' = 0$, $P''' = 0$, $P'''' = 0$ wieder die Gleichungen der ersten vier Punkte sind.

Die Gleichung $P' + P'' = 0$ welche, wie sich aus (β) ergiebt, auch so geschrieben werden kann:

$$-(P''' + P'''') = 0$$

bedeutet einen Punkt, welcher auf der Verbindungslinie von P' und P'', und, nach der letzten Form seiner Gleichung auch auf der Verbindungslinie von P''' und P'''' geht. —

Ebenso ist
$P' + P''' = 0$ oder $-(P'' + P'''') = 0$
die Gleichung des Punktes, welcher sowohl auf der Verbindungslinie der Punkte

$$P' = 0, \quad P'' = 0$$

als auch auf der Verbindungslinie von

$$P'' = 0 \text{ und } P'''' = 0$$

liegt u. s. w.

Die Gleichung des Punktes zu finden, in welchem die Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$4u + 4v + 1 = 0$$
$$16u + 12v + 1 = 0$$

mit dem Schnittpunkt der Geraden:

$$x - 2y + 8 = 0$$
$$2x + y - 44 = 0$$

verbindet.

Antw. $2x - 3y + 4 = 0.$

die Verbindungslinie der Punkte:

$$8u + 16v + 1 = 0$$
$$20u + 8v + 1 = 0$$

schneidet.

Antw. $45u + 34v + 3 = 0.$

127) Wie heisst die Gleichung des Durchschnittes M der drei Mittellinien des Dreiecks ABC, wenn

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0$$

die Gleichungen der drei Eckpunkte A, B und C sind?

Antw. Sind A_1, B_1, C_1 die den Ecken A, B und C gegenüberliegenden Mitten der Seiten des Dreiecks, so sind nach II, 106 die Gleichungen von A_1, B_1 und C_1 bez.:

$$P_2 + P_3 = 0, \quad P_1 + P_3 = 0, \quad P_1 + P_2 = 0.$$

Die Addition der Gleichungen von A und A_1 giebt:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0;$$

dies ist die Gleichung eines Punktes, welcher auf der Verbindungslinie von A und A_1 liegt. — Da nun die Addition der Gleichungen von B und B_1 sowohl, als auch derjenigen von C und C_1 dieselbe Gleichung liefert, so liegt dieser Punkt auch auf den Geraden BB_1 und CC_1. — Die Gleichung:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0,$$

welche sich aus der Addition der Gleichungen der 3 gegebenen Eckpunkte ergiebt, ist die gesuchte Gleichung des Punktes M.

Ersetzt man P_1, P_2, P_3 durch die ausführliche Schreibweise, so heisst die Gleichung des Punktes M:

$$(ux_1 + vy_1 + 1) + (ux_2 + vy_2 + 1) + (ux_3 + vy_3 + 1) = 0,$$

welche sich leicht auf die Form:

$$u\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) + v\left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) + 1 = 0$$

bringen lässt. — Hieraus erkennt man, dass die Koordinaten von M die schon früher gefundenen Werte:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

haben. (I, 10).

128) Sind $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ die Normalgleichungen der drei Seiten eines Dreiecks ABC, so giebt die Addition der Gleichungen von AB und BC die Gleichung:

$$\alpha + \beta = 0.$$

Ebenso ist die Summe der Gleichungen von AB und AC:

$$\alpha + \gamma = 0,$$

und die Summe der Gleichungen von BC und AC giebt:

$$\beta + \gamma = 0.$$

Addiert man zur ersten dieser Gleichungen die Gleichung von AC, zur zweiten die Gleichung von BC und zur dritten die Gleichung von AB, so erhält man stets dieselbe Gleichung, nämlich:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Die geometrische Bedeutung dieses Resultats ist anzugeben.

129) Die Gleichung des Punktes zu finden, welcher auf der Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$P = 0, \quad Q = 0$$

eine solche Lage hat, dass das Verhältnis seiner Abstände von den beiden gegebenen Punkten $= k$ ist.

Antw. Man findet: $P + kQ = 0$ oder $P - kQ = 0$. (s. II, 106). Ist k positiv, so liegt der gesuchte Punkt zwischen P und Q, und wenn k negativ ist ausserhalb. Für $k = 1$ ist der erste Punkt die Mitte zwischen P und Q, der zweite liegt in unendlicher Entfernung. — (s. I, 8).

130) Den Ort des Punktes M zu finden, bei welchem das Verhältnis seiner Abstände von den beiden Geraden

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

gleich k ist.

Aufl. Bezeichnet man die Koordinaten von M mit $x'y'$ und die Resultate der Substitution von x' in α und β mit α' und β' so ist: (II, 63)

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = k,$$

woraus folgt:

$$\alpha' - k\beta' = 0.$$

Dies ist eine Gleichung zwischen x' und y' welche eine Gerade bedeutet, die durch den Schnittpunkt von α und β geht. — Ebenso ist $\alpha' + k\beta' = 0$ die Gleichung einer zweiten durch den Schnittpunkt von α und β gehenden Geraden, bei welcher das Abstandsverhältnis eines jeden Punktes derselben von α und β ebenfalls gleich der Zahl k ist.

Die Gleichungen des Ortes von M kann man auch wieder so schreiben:

$$\alpha + k\beta = 0, \quad \alpha - k\beta = 0.$$

Ist $k = 1$ so halbiert die Gerade $\alpha - k\beta = 0$ den Winkel der beiden ersten Geraden und die Gerade $\alpha + k\beta = 0$ halbiert den Nebenwinkel.

131) Vier durch denselben Punkt S gehende Geraden AS, BS, MS, NS, deren Gleichungen sind:
$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha - k\beta = 0$, $\alpha + k\beta = 0$
heissen harmonische Strahlen.

Vier auf derselben Geraden liegende Punkte A, B, M und N, deren Gleichungen sind:
$P = 0$, $Q = 0$, $P + kQ = 0$, $P - kQ = 0$
heissen harmonische Punkte.

Punktreihen und Strahlenbüschel.

132) Sind $P = 0$ und $P_1 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte, so ist:
$$P + kP_1 = 0$$
die Gleichung eines neuen Punktes M, welcher auf der Verbindungslinie der beiden Punkte P und P_1 liegt. — Der Faktor k ist gleich dem Verhältnis der beiden Strecken PM und P_1M. — Ebenso ist:
$$P + k_1P_1 = 0$$
die Gleichung eines vierten Punktes N auf derselben Geraden, dessen Abstandsverhältnis von P und P_1 gleich k_1 ist. — Der Quotient $\frac{k}{k_1}$ wird nun das Doppelverhältnis der vier Punkte P, M, N_1, P_1 genannt.

Wir haben also:
$$\frac{PM}{P_1M} : \frac{PN}{P_1N} = k : k_1.$$

Sind $G = 0$ und $G_1 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden, so ist:
$$G + kG_1 = 0$$
die Gleichung einer neuen Geraden K, welche durch den Schnittpunkt S der beiden Geraden G und G_1 geht. — Der Faktor k ist gleich dem Abstandsverhältnis $\frac{r}{s}$ eines Punktes dieser Geraden von G und G_1 multipliciert mit einem konstanten Faktor C. Ebenso ist:
$$G + k_1G_1 = 0$$
die Gleichung einer vierten, ebenfalls durch S gehenden Geraden L, deren Abstandsverhältnis $\frac{r'}{s'}$, in Bezug auf G und G_1 gleich k_1C ist. — Der Quotient $\frac{k}{k_1}$ wird nun das Doppelverhältnis der vier Geraden G, K, K_1, G_1 genannt.

Wir haben also:
$$\frac{r}{s} : \frac{r'}{s'} = k : k_1.$$

Aus 129, 130 und 131 ergiebt sich demnach:

Das Doppelverhältnis von vier harmonischen Punkten ist gleich -1.

Das Doppelverhältnis von vier harmonischen Strahlen ist gleich -1.

Liegt M in der Mitte von P und P_1, so liegt M_1 in unendlicher Entfernung.

Betrachten wir nun in der Gleichung

$$P + kP_1 = 0$$

k als Veränderliche, so entspricht jedem Wert von k ein bestimmter Punkt der Geraden PP_1; man kann also diese Gleichung als die Gleichung einer Punktreihe ansehen, deren Träger die durch P und P_1 gehende Gerade ist.

Zwei Punktreihen

$$P + kP_1 = 0$$

und

$$Q + kQ_1 = 0$$

kann man derartig in Beziehung bringen, dass man diejenigen Punkte beider Reihen, welchen derselbe Wert von k zukommt, einander entsprechen lässt. Man sagt alsdann, die Reihen sind projektivisch aufeinander bezogen. —

Halbiert K den Winkel zwischen G und G_1, so steht K_1 senkrecht zu K.

Betrachten wir nun in der Gleichung

$$G + kG_1 = 0$$

k als Veränderliche, so entspricht jedem Wert von k eine bestimmte Gerade, welche durch S geht; man kann also diese Gleichung als die Gleichung eines Strahlenbüschels ansehen, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt S von G und G_1 ist.

Zwei Strahlenbüschel

$$G + kG_1 = 0$$

und

$$H + kH_1 = 0$$

kann man derartig in Beziehung bringen, dass man diejenigen Strahlen beider Büschel, welchen derselbe Wert von k zukommt, einander entsprechen lässt. — Man sagt alsdann, die Büschel sind projektivisch aufeinander bezogen. —

Ebenso nennt man eine Punktreihe $P + kP_1 = 0$ projektivisch auf einen Strahlenbüschel $G + kG_1 = 0$ bezogen, wenn man diejenigen Punkte der Reihe und Strahlen des Büschels, welchen derselbe Wert von k zukommt, einander entsprechen lässt. —

Eine Punktreihe

$$P + kP_1 = 0$$

ist projektivisch auf einen Strahlenbüschel bezogen, wenn jeder Punkt der Reihe auf dem entsprechenden Strahl des Büschels liegt. Denn, schreibt man die Gleichung der Punktreihe ausführlich:

$$ux_1 + vy_1 + 1$$
$$+ k(ux_2 + vy_2 + 1) = 0$$

oder

Ein Strahlenbüschel

$$G + kG_1 = 0$$

ist projektivisch auf eine Punktreihe bezogen, wenn jeder Strahl des Büschels durch den entsprechenden Punkt der Reihe geht. — Denn, schreibt man die Gleichung des Büschels ausführlich:

$$u_1x + v_1y + 1$$
$$+ k(u_2x + v_2y + 1) = 0$$

oder

$$u\left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}\right) + v\left(\frac{y_1 + ky_2}{1+k}\right) + 1 = 0$$

so sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Reihe:

$$\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \quad \frac{y_1 + ky_2}{1+k}.$$

Verbindet man die Punkte der Reihe mit einem beliebigen Punkte $S(x'y')$, so erhält man als Gleichung des dadurch entstehenden Strahlenbüschels:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x_1 + kx_2, & y_1 + ky_2, & 1+k \end{vmatrix} = 0$$

oder auch:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

woraus hervorgeht, dass wirklich jedem Strahl des Büschels derjenige Wert von k zukommt, welcher dem auf ihm liegenden Punkt der Reihe entspricht.

$$x\left(\frac{u_1 + ku_2}{1+k}\right) + y\left(\frac{v_1 + kv_2}{1+k}\right) + 1 = 0$$

so sind die Koordinaten eines beliebigen Strahles des Büschels:

$$\frac{u_1 + ku_2}{1+k}, \quad \frac{v_1 + kv_2}{1+k}.$$

Schneidet man die Strahlen des Büschels durch eine beliebige Gerade $P(u'v')$, so erhält man als Gleichung der dadurch entstehenden Punktreihe

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u_1 + ku_2, & v_1 + kv_2, & 1+k \end{vmatrix} = 0$$

oder auch:

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

woraus hervorgeht, dass wirklich jedem Punkt der Reihe derjenige Wert von k zukommt, welcher dem durch ihn gehenden Strahl des Büschels entspricht.

Die besondere Lage einer Punktreihe in Bezug auf einen dieser Reihe projektivischen Strahlenbüschel, wo jeder Punkt der Reihe auf dem ihm entsprechenden Strahl des Büschels liegt, heisst die perspektivische Lage. —

Wird eine Punktreihe ABCD, Fig. 9, mit zwei Punkten S und S'

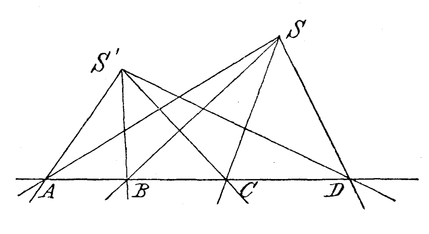


Fig. 9.

Wird ein Strahlenbüschel $S(\alpha\beta, \gamma\delta)$, Fig. 10, von zwei Geraden p und q

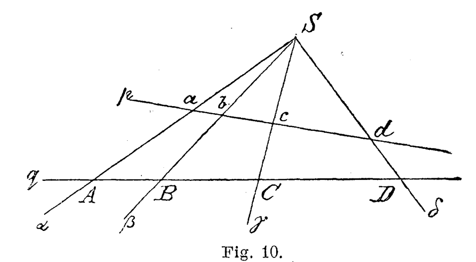


Fig. 10.

durch Geraden verbunden, so entstehen zwei Strahlenbüschel, welche beide der Punktreihe, folglich auch unter sich projektivisch sind. —

Entsprechende Strahlen der beiden Büschel treffen sich in diesem Falle in denselben Punkten der Punktreihe.

Schneiden sich entsprechende Strahlen zweier projektivischen Strahlenbüschel in Punkten einer Geraden, so sagt man, die beiden Büschel sind in perspektivischer Lage.

geschnitten, so entstehen auf den letzteren zwei Punktreihen, welche beide dem Strahlenbüschel, und folglich auch unter sich projektivisch sind.

Entsprechende Punkte beider Reihen liegen in diesem Falle auf demselben Strahle des Büschels.

Liegen entsprechende Punkte zweier Punktreihen auf den Strahlen eines Büschels, so sagt man, die Punktreihen haben perspektivische Lage.

Vier entsprechende Elemente von zwei projektivischen Gebilden haben dasselbe Doppelverhältnis. — Sind z. B.

$$P + kP_1 = 0 \quad \text{und} \quad Q + kQ_1 = 0$$

zwei projektivische Punktreihen und sind ferner vier Punkte a, b, c, d der ersten Reihe gegeben durch:

$$P + k_1P_1 = 0, \quad P + k_2P_1 = 0, \quad P + k_3P_1 = 0, \quad P + k_4P_1 = 0$$

so setze man: $P + k_1P_1 = R$, $P + k_4P_1 = S$, dann heissen die Gleichungen der Punkte a und d abgekürzt:

$$R = 0, \quad S = 0.$$

Für die Gleichungen der Punkte b und c findet man alsdann:

$$R + \frac{k_1 - k_2}{k_2 - k_4} S = 0 \quad \text{und} \quad R + \frac{k_1 - k_3}{k_3 - k_4} S = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für das Doppelverhältnis der 4 Punkte a, b, c, d

$$\frac{ab}{bd} : \frac{ac}{cd} = \frac{k_1 - k_2}{k_2 - k_4} : \frac{k_1 - k_3}{k_3 - k_4}.$$

Die vier entsprechenden Punkte α, β, γ, δ der zweiten Punktreihe haben die Gleichungen:

$$Q + k_1Q_1 = 0, \quad Q + k_2Q_1 = 0, \quad Q + k_3Q_1 = 0, \quad Q + k_4Q_1 = 0.$$

Es ist leicht ersichtlich, dass man genau wie oben findet:

$$\frac{\alpha\beta}{\beta\delta} : \frac{\alpha\gamma}{\gamma\delta} = \frac{k_1 - k_2}{k_2 - k_4} : \frac{k_1 - k_3}{k_3 - k_4}.$$

Gleiches ergiebt sich für zwei projektivische Strahlenbüschel oder für Strahlenbüschel und Punktreihe, welche projektivisch sind. —

Sind zwei Gebilde einem dritten projektivisch, so sind sie auch untereinander projektivisch. —

Drei Elementen eines Gebildes lassen sich immer drei beliebige Elemente eines anderen Gebildes zuordnen; dann entspricht jedem vierten Element des ersten Gebildes ein bestimmtes viertes Element des zweiten. —

Sind z. B.:

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad P + kQ = 0$$

drei Punkte einer Reihe (α), und:

$$R = 0, \quad S = 0, \quad R + k'S = 0$$

drei Punkte einer anderen Reihe (β), so kann man setzen: $k' = kl$. — Dann heisst die Gleichung des dritten Punktes der Reihe (β):

$$R + klS = 0$$

oder, wenn man lS mit S' bezeichnet, so heissen die Gleichungen der drei Punkte der Reihe (β)

$$R = 0, \quad S' = 0, \quad R + kS' = 0,$$

worin nun $S' = 0$ oder $lS = 0$ wieder die Gleichung des Punktes $S = 0$ bedeutet, da der konstante Faktor l in dieser Gleichung ohne Einfluss ist. — Dass nun $P + kQ = 0$ und $R + kS' = 0$ projektivische Punktreihen ergeben ist ersichtlich. — Übrigens würde einem vierten Punkte der ersten Reihe (α) ein bestimmtes Doppelverhältnis entsprechen, welches dem Doppelverhältnis der entsprechenden Punkte der Reihe (β) gleich sein muss; dies ist, wenn drei Punkte der letzteren schon gegeben sind, nur noch bei einem vierten Punkte dieser Reihe möglich.

Wenn deshalb zwei projektivische Punktreihen auf derselben Geraden liegen, und es fallen drei Paare entsprechender Punkte zusammen, so sind die Reihen kongruent, d. h. es fallen alle übrigen Paare entsprechender Punkte ebenfalls zusammen. —

Ebenso kann man beweisen, dass drei Punkten einer Reihe drei beliebige Strahlen eines Büschels zugewiesen werden können. Jedem vierten Punkte der Reihe entspricht ein vierter bestimmter Strahl des Büschels. — Liegen drei Punkte der Reihe auf den entsprechenden Strahlen des Büschels, so liegen alle übrigen Punkte der Reihe auf den ihnen entsprechenden Strahlen, d. h. die beiden Gebilde liegen in diesem Falle perspektivisch. —

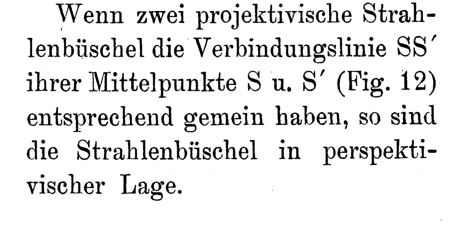
Dass der obige Satz ebenso für zwei Strahlenbüschel nachgewiesen werden kann, ist leicht ersichtlich. — Haben deshalb zwei projektivische Strahlenbüschel mit demselben Mittelpunkt S drei entsprechende Strahlen gemeinschaftlich, so fallen auch alle übrigen Paare entsprechender Strahlen zusammen, d. h. die beiden Büschel sind kongruent. — Wenn ferner

drei Paare entsprechender Strahlen zweier Strahlenbüschel sich in Punkten einer Geraden schneiden, so müssen alle übrigen Paare entsprechender Strahlen in Punkten derselben Geraden zusammentreffen. Die beiden Büschel haben in diesem Falle perspektivische Lage. —

Zwei projektivische Gebilde kann man immer als erstes und letztes von mehreren Gebilden betrachten, von denen je zwei aufeinander folgende perspektivische Lage haben. —

133) Wenn zwei projektivische Punktreihen den Schnittpunkt A (Fig. 11) ihrer beiden Träger a und a′ entsprechend gemein haben, so sind die Punktreihen in perspektivischer Lage.

Wenn zwei projektivische Strahlenbüschel die Verbindungslinie SS′ ihrer Mittelpunkte S u. S′ (Fig. 12) entsprechend gemein haben, so sind die Strahlenbüschel in perspektivischer Lage.



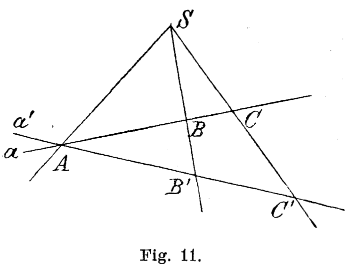


Fig. 11.

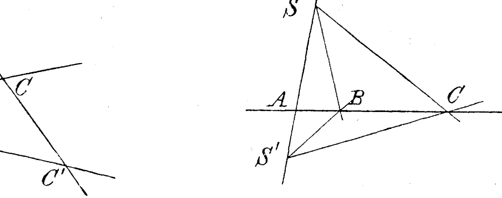


Fig. 12.

Zieht man nämlich durch zwei Paare entsprechender Punkte B, B′ und C, C′ Geraden bis zum Schnittpunkte S, so kann man letzteren als Mittelpunkt eines Strahlenbüschels ansehen, von welchem die beiden Punktreihen a u. a′ Schnitte sind. Folglich sind a und a′ in perspektivischer Lage.

Verbindet man nämlich die Schnittpunkte B und C von zwei Paaren entsprechender Strahlen durch eine Gerade, so kann man die letztere als Träger einer Punktreihe A, B, C betrachten, welche durch beide Strahlenbüschel S und S′ projiciert wird. Folglich sind die beiden Büschel in perspektivischer Lage.

134) Gegeben drei Paare entsprechender Punkte zweier projektivischen Punktreihen. — Man soll den, einem vierten Punkte der einen Reihe entsprechenden Punkt der zweiten Reihe bestimmen.

Aufl. Es seien A und A′, B und B′, C und C′ (Fig. 13) drei Paare entsprechender Punkte der beiden Reihen α und β. — Durch zwei derselben, z. B. A und A′ ziehe man eine Gerade und nehme auf dieser zwei Punkte S und S′ als Mittelpunkte zweier projekti-

vischen Strahlenbüschel, welche die Punktreihen α bez. β projicieren. — Die Strahlen BS und $B'S'$ treffen sich in B'', ebenso CS und $C'S'$ in C''. — Die durch $B''C''$ gehende Gerade wird von SS' in A'' getroffen. — Beide Büschel projicieren also die Punktreihe $A''B''C''$ und sind folglich in perspektivischer Lage. — Ist nun D ein vierter Punkt der Reihe α, so projiciert man D von S aus nach D''; letzteren Punkt von S' aus nach D', dann ist D' derjenige Punkt der Reihe β, welcher dem Punkte D entspricht. —

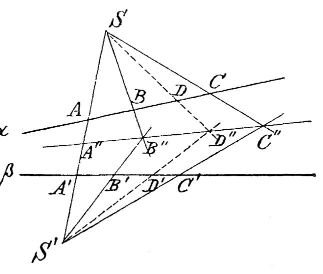


Fig. 13.

135) Gegeben drei Paare entsprechender Strahlen zweier projektivischen Büschel. — Man soll den einem vierten Strahle des einen Büschels entsprechenden Strahl des zweiten Büschels bestimmen.

136) Zwei projektivische Punktreihen haben denselben Träger. Gegeben sind drei Paare entsprechender Punkte. Zu einem vierten Punkt der einen Reihe den entsprechenden Punkt der anderen Reihe zu finden.

Zwei projektivische Strahlenbüschel haben denselben Mittelpunkt. Gegeben sind drei Paare entsprechender Strahlen. Zu einem vierten Strahle des einen Büschels den entsprechenden Strahl des anderen Büschels zu finden.

137) Eine gegebene Punktreihe perspektivisch zu einem der Punktreihe projektivischen Strahlenbüschel zu legen.

138) Zwei projektivische Büschel in perspektivische Lage zu bringen. —

139) Liegen die Eckpunkte zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (Fig. 14)

Liegen die Schnittpunkte a, b und P von je zwei Seiten der

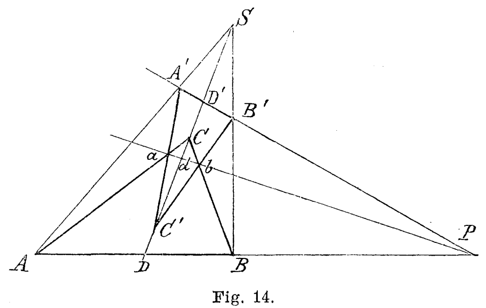


Fig. 14.

auf drei Strahlen eines Büschels, so schneiden sich die Seitenpaare AB, A′B′; AC, A′C′; BC, B′C′ in drei Punkten einer Geraden.

Beweis. Die Punktreihen ADB und A′D′B′ liegen perspektivisch, folglich haben beide den Schnittpunkt P ihrer Träger entsprechend gemeinschaftlich. — Beide Reihen werden aus den Mittelpunkten C bez. C′ projiciert; die projicierenden Strahlenbüschel liegen aber perspektivisch, weil sie den Strahl CC′ entsprechend gemein haben. Folglich schneiden sich die entsprechenden Strahlen beider Büschel in den Punkten a, b, P einer Geraden.

Dreiecke ABC und A′B′C′ auf einer Geraden, so treffen sich die Verbindungslinien AA′, BB′, CC′ der Eckpunkte in demselben Punkte S.

Die Strahlenbüschel C, C′ welche beide die Punktreihe a, b, P projicieren, liegen perspektivisch, folglich haben beide den Strahl CC′, welcher ihre Mittelpunkte verbindet, entsprechend gemeinschaftlich. Beide Büschel werden durch die Geraden AB und A′B′ in Punktreihen geschnitten, welche perspektivisch liegen, weil sie den Punkt P entsprechend gemein haben. — Folglich treffen die Verbindungslinien AA′, BB′, CC′ entsprechender Punkte in demselben Punkte S zusammen.

Anm. Die beiden Dreiecke ABC und A′B′C′, deren Ecken auf drei Strahlen des Büschels S liegen, haben perspektivische Lage.

Harmonische Eigenschaften des Vierecks bez. Vierseits.

140) Sind: $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$, $G_4 = 0$ die Gleichungen der Seiten eines Vierseits (Fig. 15), welche nach I, 125 immer der Bedingung

$$G_1 + G_2 + G_3 + G_4 \equiv 0$$

genügen können, so ist

$$G_1 + G_2 = 0 \quad \text{oder} \quad -(G_3 + G_4) = 0$$

die Gleichung der Diagonale P_1P_2. Ebenso ist die Gleichung der Diagonale P_3P_4:

$$G_1 + G_3 = 0 \quad \text{oder} \quad -(G_2 + G_4) = 0$$

Sind: $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0$ die Gleichungen der vier Eckpunkte eines Vierecks (Fig. 15), welche nach I, 125 immer der Bedingung:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \equiv 0$$

genügen können, so ist

$$P_1 + P_2 = 0 \quad \text{oder} \quad -(P_3 + P_4) = 0$$

die Gleichung des Schnittpunktes S. Ebenso ist die Gleichung des Punktes Q:

$$P_2 + P_3 = 0 \quad \text{oder} \quad -(P_1 + P_4) = 0$$

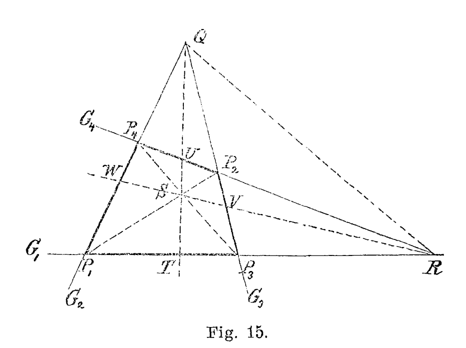


Fig. 15.

und die der Diagonale QR:

$G_2+G_3=0$ oder $-(G_1+G_4)=0$.

Ferner ist:

$$G_2-G_3=0$$

was man auch schreiben kann:

$$G_1+G_2-(G_1+G_3)=0$$

die Gleichung einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt Q der Geraden G_2 und G_3 und auch, wie man aus der zweiten Form ihrer Gleichung sieht, durch den Schnittpunkt S von P_1P_2 und P_3P_4 geht.

Die vier Geraden

$$G_2=0,\quad G_3=0,\quad G_2-G_3=0,\quad G_2+G_3=0$$

bilden demnach einen harmonischen Strahlenbüschel, welcher G_1 und G_4 in den harmonischen Punktreihen P_3P_2UR und P_1P_4TR schneidet. — (131).

Ebenso wird bewiesen, dass G_1, G_4, WR und QR, ferner SP_3, SP_2, SV, SQ je einen harmonischen Strahlenbüschel bilden.

und die des Punktes R:

$P_1+P_3=0$ oder $-(P_2+P_4)=0$.

Ferner ist:

$$P_2-P_3=0$$

was man auch schreiben kann:

$$P_1+P_2-(P_1+P_3)=0$$

die Gleichung eines Punktes V, welcher auf der Verbindungslinie der Punkte P_2 und P_3, und nach der letzten Form seiner Gleichung auch auf der Verbindungslinie von S und R liegt. —

Die vier Punkte

$$P_2=0,\quad P_3=0,\quad P_2-P_3=0,\quad P_2+P_3=0$$

sind demnach vier harmonische Punkte, deren Verbindungslinien mit R den harmonischen Strahlenbüschel RQ, RV, RP_2, RP_3 bilden. (131).

Ebenso wird bewiesen, dass P_1, P_4, W, Q, ferner P_1, P_3, T, R je eine harmonische Punktreihe bilden.

Die folgenden Aufgaben können hiernach graphisch ohne Hülfe des Zirkels, lediglich durch Ziehen gerader Linien gelöst werden. —

141) Zu drei gegebenen Punkten A, X, B, einer Punktreihe, den vierten harmonischen Punkt zu finden.

142) Zu drei gegebenen Strahlen eines Büschels den vierten harmonischen Strahl zu finden.

143) Durch einen gegebenen Punkt M eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier gegebenen Geraden AB und CD zu ziehen.

144) Auf einer gegebenen Geraden MN den Punkt anzugeben, in welchem dieselbe von der Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte A und B geschnitten wird, ohne AB selbst zu ziehen.

145) Durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu zwei gegebenen Parallelen zu ziehen.

146) Die letztere Aufgabe zu lösen, wenn der gegebene Punkt gleiche Abstände von den gegebenen Parallelen hat.

147) Eine gegebene Gerade AC ist in B halbiert. — Man soll durch einen gegebenen Punkt M eine Parallele zu AC ziehen.

148) Auf der Geraden u sind die gleichen Strecken $AB = BC$ gegeben. Man soll AB halbieren. —

Vermischte Aufgaben.

149) Den Ort des Punktes zu finden, für welchen die Summe seiner Entfernungen von zwei gegebenen festen Geraden konstant ist.

Antw. Der Ort ist eine Gerade, welche mit den beiden gegebenen Geraden ein gleichschenkliges Dreieck bildet.

150) Den Ort des Punktes zu finden, für welchen die Summe seiner Abstände von beliebig vielen Geraden: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ... $\varphi = 0$, gleich S ist.

Antw. Die Gleichung des Ortes ist: $\alpha + \beta + \gamma + \dots \varphi = S$.

151) Den Ort des Punktes zu finden, für welchen die Summe der Abstände von drei Geraden, welche ein gleichseitiges Dreieck einschliessen, gleich der Höhe dieses Dreiecks ist. —

Antw. Jeder Punkt der Ebene des Dreiecks genügt der gegebenen Bedingung. —

152) Das Verhältnis k der Abschnitte zu finden, in welche die Gerade $\alpha = 0$ die Verbindungslinie der Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$ teilt.

Antw. $k = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (wenn α_1 das Resultat der Substitution von $x_1 y_1$ in α bedeutet etc.).

153) Die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks $A(x_1 y_1)$, $B(x_2 y_2)$, $C(x_3 y_3)$ sind gegeben. — Die Gerade $\alpha = 0$ schneidet die drei Seiten

AB, AC und BC in den Punkten D, E und F. — Zu beweisen, dass:

$$\frac{AD \cdot BF \cdot CE}{BD \cdot CF \cdot AE} = -1 \text{ ist.}$$

Anmerkung: Die im Zähler stehenden Abschnitte haben keinen Endpunkt gemeinschaftlich; dasselbe gilt für die im Nenner stehenden Abschnitte. —

154) Zu beweisen, dass der vorige Satz für ein Polygon gültig ist, welches von einer Transversale geschnitten wird. —

155) Zieht man von den Ecken eines Dreiecks ABC Transversalen durch einen Punkt O, so werden die Seiten AB, AC, BC in den Punkten M, N, und P geschnitten. — Zu beweisen, dass:

$$\frac{AM \cdot BP \cdot CN}{BM \cdot CP \cdot AN} = 1 \text{ ist.}$$

156) Wird ein beliebiges Viereck durch eine Gerade in zwei andere Vierecke zerlegt, so geht die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Diagonalen beider Vierecke durch den Schnittpunkt der Diagonalen des ganzen Vierecks.

Mit Hülfe projektivischer Strahlenbüschel und Punktreihen zu beweisen.

157) Den Ort des Punktes zu finden, für welchen die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten A und B gleich k^2 ist.

Antw. Ist A Anfangspunkt, $AB = a$ die Abscissenachse, so heisst die Gleichung des Ortes $x = \frac{k^2 + a^2}{2a}$. Dieselbe stellt eine zu AB senkrechte Gerade dar.

158) Wie heisst die Polargleichung einer Geraden, welche parallel zur Ordinatenachse im Abstand a von derselben liegt?

Antw. $r = \frac{a}{\cos \varphi}$. (Der Pol liegt im Anfangspunkt, φ wird von der XAchse aus gerechnet.)

159) Die Polargleichung der Geraden $y = ax + b$ zu bestimmen.

Antw. $r = \frac{b}{\sin \varphi - a \cos \varphi}$.

III. Abschnitt.

Der Kreis.

1) Sind α und β die Koordinaten des Mittelpunktes, r der Halbmesser eines Kreises, so heisst die Gleichung desselben:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

Hieraus erhält man für $\alpha = 0, \cdot \beta = 0$ die Mittelpunktsgleichung:

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

und für $\alpha = r$, $\beta = 0$ die Scheitelgleichung:

$$y^2 = 2rx - x^2.$$

2) Wo schneidet der Kreis $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 100$ die Koordinatenachsen?

Antw. Die Schnittpunkte auf der Abscissenachse liegen in den Abständen 12 und -4, die mit der Ordinatenachse in den Abständen $6 + 2\sqrt{21}$ und $6 - 2\sqrt{21}$ vom Anfangspunkt.

3) Dieselbe Aufgabe für den Kreis $(x-5)^2 + (y-16)^2 = 169$ zu lösen. —

Antw. Die Schnittpunkte liegen auf der Ordinatenachse in den Entfernungen 4 und 28; die Abscissenachse wird nicht geschnitten. —

4) Ebenso, wenn folgende Kreise gegeben sind:

a) $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 25$; b) $(x+12)^2 + (y+8)^2 = 36$.

Antw. a) Der Kreis schneidet die Ordinatenachse in den Abständen 2 und 8, und berührt die Abscissenachse im Abstand -4 vom Anfangspunkt. —

b) Der Kreis schneidet die Koordinatenachsen nicht.

5) Wie weit ist derjenige Punkt des Kreises $(y-6)^2 + (x-8)^2 = 100$, dessen Abscisse 10 ist, vom Anfangspunkt entfernt?

Antw. Es giebt zwei Punkte; dieselben haben vom Anfangspunkt die Entfernungen: $\sqrt{8(29 + 6\sqrt{6})}$, $\sqrt{8(29 - 6\sqrt{6})}$.

6) Wie heisst die Gleichung des Kreises vom Halbmesser 4, welcher die Abscissenachse im Punkte M (10, 0) berührt.

Antw. $(x-10)^2 + (y-4)^2 = 16$.

7) Die Gleichung des Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt die Koordinaten (6, 10) hat, und welcher durch den Punkt M(11, 22) geht.

Antw. $(x-6)^2 + (y-10)^2 = 169$.

8) Die Scheitelgleichung des Kreises zu finden, welcher durch den Punkt $M(9, 12)$ geht.

Antw. $y^2 = 25x - x^2$.

9) Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher durch die drei Punkte $M_1(4, 3)$, $M_2(16, 8)$, $M_3(4, 8)$ geht.

Antw. $(x - 10)^2 + (y - 5\frac{1}{2})^2 = 42\frac{1}{4}$.

10) Wie heisst die Gleichung des Kreises, welcher durch den Anfangspunkt und die beiden Punkte $M_1(6, 18)$, $M_2(12, 16)$ geht?

Antw. $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$.

11) Ebenso die Gleichung des Kreises, welcher durch die Punkte $M_1(4, 7)$, $M_2(16, 13)$, $M_3(-8, 1)$ geht, zu finden. —

12) Zwischen zwei auf dem Felde bestimmten Punkten A und B soll ein Kreisbogen (z. B. eine Eisenbahnkurve) abgesteckt werden. Es sind gegeben die Sehne $AB = 1600$ m (Fig. 16) und die mittlere Höhe $CD = 50$ m. — Um eine Reihe von Punkten abstecken zu können, soll man die je 100 m voneinander entfernten Ordinaten des Kreises (wenn AB die Abscissenachse, C der Anfangspunkt ist) berechnen.

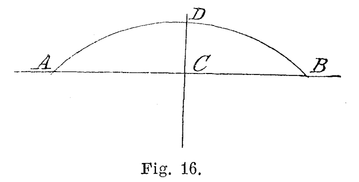


Fig. 16.

Antw. Man findet für die erste um 100 m von C entfernte Ordinate 49,22 m; die folgenden sind: 46,89 m, 42,99 m, 37,54 m, 30,52 m, 21,92 m, 11,75 m, 0. —

13) Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher durch die beiden Punkte $M_1(4, 4)$, $M_2(20, 8)$ geht, und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $y = 2x - 6$ liegt.

Antw. $(x - 10)^2 + (y - 14)^2 = 136$.

14) Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher durch den Punkt $M(13, 7)$ geht, dessen Halbmesser 5 ist, und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $y = \frac{1}{2}x + 3$ liegt.

Antw. Man findet zwei Kreise:

$$(x - 16)^2 + (y - 11)^2 = 25$$
$$(x - 8)^2 + (y - 7)^2 = 25.$$

15) Die Gleichung des Kreises vom Halbmesser 6 zu finden, welcher durch die beiden Punkte $M_1(12, 14)$, $M_2(18, 8)$ geht.

Antw. Es giebt zwei Kreise, deren Gleichungen sind:

$$(x - 12)^2 + (y - 8)^2 = 36, \quad (x - 18)^2 + (y - 14)^2 = 36.$$

16) Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher durch die Punkte $M_1(3, 9)$, $M_2(24, 12)$ geht und dessen Mittelpunkt auf der Abscissenachse liegt.

Antw. $y^2 = 30x - x^2$.

17) Entwickelt man die Gleichung des Kreises:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

so erhält man:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Diese Gleichung lässt sich in folgender Form schreiben:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

in welcher sie als Gleichung zweiten Grades zwischen den Veränderlichen x und y erscheint, in welcher jedoch das Produkt xy nicht vorkommt. — Die Quadrate von x und y haben beide den Faktor 1; sie können jedoch auch mit gleichen Faktoren multipliciert vorkommen, welche man durch Division mit denselben beseitigen kann. — Vergleicht man (b) mit (a), so ergeben sich für die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius aus (b) die Formeln:

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = -\frac{b}{2}, \quad r = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}.$$

18) Welches sind die Koordinaten des Mittelpunktes und wie gross ist der Radius des Kreises:

$$4(x^2 + y^2) - 12x + 16y - 11 = 0.$$

Antw. $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -2$, $r = 3$.

Anmerkung. Man kann jede Gleichung von der Form $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ leicht wieder auf die Form $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ zurückführen. — Ist z. B. die Gleichung eines Kreises:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 16 = 0$$

gegeben, so ergänzt man sowohl $x^2 - 6x$, als auch $y^2 + 8y$ zu vollständigen Quadraten. Die letzteren sind: $(x - 3)^2$ und $(y + 4)^2$. — Die Quadrate der Zahlen -3 und 4, welche zu $x^2 - 6x$ und $y^2 + 8y$ dadurch addiert worden sind, füge man mit dem Minuszeichen wieder hinzu, und vereinige dieselben mit -16; dadurch erhält man aus der gegebenen Gleichung leicht die folgende:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 41$$

woraus die Koordinaten des Mittelpunktes und der Halbmesser des des Kreises unmittelbar entnommen werden können. —

19) Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes und den Halbmesser des Kreises: $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

Antw. $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $r = 3$.

20) Die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius des Kreises

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 20 = 0$$

zu finden.

21) Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher durch die drei Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$, $M_3(x_3 y_3)$ geht.

Aufl. Es sei die gesuchte Gleichung:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Die Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, dass der Kreis durch die gegebenen Punkte geht, sind:

$$x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0$$
$$x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0.$$

Die Werte von a, b, c welche sich aus den drei letzten Gleichungen ergeben, müssen auch der ersten Gleichung genügen, was nur möglich ist, wenn:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist also die gesuchte Gleichung des Kreises. — Die Unterdeterminante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ist der Koeffizient von $x^2 + y^2$. — Ist diese gleich Null, so geht die Gleichung des Kreises in eine Gleichung ersten Grades über, und bedeutet alsdann eine Gerade (s. II, 49).

22) Bestimme nach dem vorigen die Gleichung des Kreises, welcher durch die 3 Punkte $M_1(6, 4)$, $M_2(12, 10)$, $M_3(16, 2)$ geht.

Antw. $3x^2 + 3y^2 - 68x - 28y + 364 = 0.$

Man löse hiernach die Aufgaben 9), 10) und 11) d. Abschn.

23) Wann liegen die vier Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$, $M_3(x_3 y_3)$, $M_4(x_4 y_4)$ auf einem Kreise?

24) Wie heisst die Gleichung des Kreises, welcher durch die beiden Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$ geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $mx + ny + p = 0$ liegt?

Antw.
$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ -2p, & m, & n, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man löse hiernach die Aufgabe 13) d. Abschn.

25) Den Durchschnitt der Geraden $3x - 4y + 16 = 0$ mit dem Kreise

$$x^2 + y^2 - 16x - 20y + 139 = 0$$

zu bestimmen.

Antw. Man findet für die Koordinaten der beiden Durchschnittspunkte (4, 7) und (12, 13).

26) Wo schneidet die Gerade $3x + 4y + 40 = 0$ den Kreis $x^2 + y^2 = 64$?

Antw. Man findet nur einen Punkt $(-4\frac{4}{5}, -6\frac{2}{5})$. — Die Gerade ist also eine Tangente. —

27) Dieselbe Aufgabe wenn die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 - 20x - 24y + 288 = 0$, und die der Geraden $2x + 5y - 20 = 0$ ist.

28) Das Verhältnis k der Abschnitte zu finden, in welche der Kreis:

$$x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 = 0$$

die Verbindungslinie der beiden Punkte $M_1(6, 8)$, $M_2(18, 17)$ teilt.

Antw. Für den einen Schnittpunkt ist das Verhältnis der Abschnitte $k = \frac{1}{2}$, für den anderen $k = -\frac{1}{4}$. —

29) Gegeben die Mittelpunktsgleichung eines Kreises:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Man soll die Gleichung der Tangente aufstellen, welche den Kreis im Punkte $M(x_1 y_1)$ berührt.

Aufl. Ist $N(x_2 y_2)$ ein zweiter Punkt des Kreises, so heisst die Gleichung der durch M und N gehenden Sekante:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Um von der Sekante zur Tangente in M überzugehen, muss man N mit M zusammenfallen lassen, also $x_2 = x_1$ und $y_2 = y_1$ setzen. — Dadurch würde aber der Bruch $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen. — Es ist nun in (a) noch nicht die Bedingung enthalten, dass M und N auf dem Kreise liegen. — Diese giebt die Gleichungen:

$$x_2{}^2 + y_2{}^2 = r^2$$
$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = r^2.$$

Durch Subtraktion findet man hieraus:

$$x_2{}^2 - x_1{}^2 + y_2{}^2 - y_1{}^2 = 0$$

oder

$$(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 0$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}.$$

Setzt man diesen Wert in (a) ein, so heisst die Gleichung der Sekante:

$$y - y_1 = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1),$$

und wenn man N mit M zusammenfallen lässt, so erhält man hieraus als Gleichung der Tangente in M:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Multipliciert man beiderseitig mit y_1 und beachtet, dass $x_1{}^2 + y_1{}^2 = r^2$ ist, so erhält man für die Gleichung der Tangente die einfachere Form:

$$y y_1 + x x_1 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

30) Zu beweisen, dass die Tangente senkrecht zu dem Halbmesser steht, welcher den Berührungspunkt mit dem Mittelpunkt verbindet.

31) Die Gleichung der Tangente für denjenigen Punkt des Kreises $x^2 + y^2 = 100$ zu finden, dessen Abscisse 6 ist.

Antw. Es giebt zwei Tangenten, deren Gleichungen sind: $3x + 4y - 50 = 0$ und $3x - 4y - 50 = 0$.

32) Es sollen die Gleichungen der Tangenten bestimmt werden, welche man von dem Punkte $M(17, 0)$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 64$ ziehen kann.

Antw. $8x + 15y - 136 = 0$ und $8x - 15y - 136 = 0$.

33) Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn $x^2 + y^2 = 100$ die Gleichung des Kreises ist, und der Punkt M die Koordinaten (16, 12) hat.

Antw. Die Gleichungen der Tangenten sind:

$$x(4 - 3\sqrt{3}) + y(3 + 4\sqrt{3}) = 100$$

und

$$x(4 + 3\sqrt{3}) + y(3 - 4\sqrt{3}) = 100.$$

34) Wie heissen die Gleichungen der Tangenten des Kreises $x^2 + y^2 = 100$, welche parallel zu der Geraden $y = \frac{3}{4}x + 12$ sind?

Antw. $4x - 3y - 50 = 0$, $4x - 3y + 50 = 0$.

35) Wann berührt die Gerade $ax + by + 1 = 0$ den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$?

Antw. Wenn: $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r$ ist. (s. II, 63).

36) Ebenso die Bedingung anzugeben, welcher die Koeffizienten a, b, c genügen müssen, wenn die Gerade $ax + by + c = 0$ den Kreis $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ berühren soll.

Antw. Es muss sein: $\frac{a\alpha + b\beta + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r$.

37) Mit Hülfe des vorigen Resultats die Gleichungen der Tangenten zu finden, welche man vom Anfangspunkt an den Kreis $(x - 9)^2 + (y - 13)^2 = 25$ ziehen kann.

Antw. $3x - 4y = 0$ und $24x - 7y = 0$.

38) Wie heisst die Gleichung der Tangente an den Kreis:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

wenn die Koordinaten des Berührungspunktes $(x_1 y_1)$ sind?

Antw. $(2x_1 + a)x + (2y_1 + b)y + ax_1 + by_1 + 2c = 0$.

39) Die Länge l der Tangente zu finden, welche man vom Punkte $M(x_1 y_1)$ an den Kreis $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$ ziehen kann.

Antw. $l^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 - r^2$. — Man erhält also das Quadrat der Tangente einfach durch Substitution der Koordinaten des gegebenen Punktes in die Gleichung des Kreises. — Ist die letztere in der Form:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

gegeben, so ist:

$$l^2 = x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0.$$

40) Auf der Geraden $4x + 3y + 2 = 0$ denjenigen Punkt zu bestimmen, von welchem gleichlange Tangenten an die beiden Kreise:

$$x^2 + y^2 - 24x - 16y + 183 = 0, \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 - 8x - 20y + 100 = 0$$

gezogen werden können. —

Antw. Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind: $3\frac{49}{64}$, $-5\frac{11}{16}$.

41) Die Koordinaten desjenigen Punktes zu finden, von welchem gleichlange Tangenten an die drei Kreise

$$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 24x - 32y + 391 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 16x - 16y + 92 = 0$$

gezogen werden können.

Antw. $x = 1\frac{59}{88}$, $y = 14\frac{45}{88}$.

42) Den Ort des Punktes M zu finden, von welchem aus gleichlange Tangenten an die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$
$$x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

gezogen werden können. —

Aufl. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes M mit $x'y'$ so erhält man als Bedingung dafür, dass die von M an die Kreise gezogenen Tangenten gleiche Länge haben, die Gleichung:

$$x'^2 + y'^2 + ax' + by' + c = x'^2 + y'^2 + a_1x' + b_1y' + c_1$$

und da $x'y'$ dieser Gleichung stets genügen müssen, so ist dieselbe die Gleichung des gesuchten Ortes. — Die Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$x'^2 + y'^2 + ax' + by' + c - (x'^2 + y'^2 + a_1x' + b_1y' + c_1) = 0$$

oder wenn man die Veränderlichen x' und y' wieder mit x und y bezeichnet:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c - (x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) = 0; \qquad (\alpha)$$

Die Gleichung des gesuchten Ortes ergiebt sich also einfach durch die Subtraktion der Gleichungen der gegebenen Kreise. — Die Quadrate von x und y fallen weg, also heisst die Gleichung einfacher:

$$(a - a_1)\,x + (b - b_1)\,y + c - c_1 = 0,$$

sie stellt mithin eine Gerade vor, welche die Chordale der beiden Kreise genannt wird. — Diejenigen Werte von x und y, welche den Gleichungen beider Kreise zugleich genügen, müssen, wie man aus der Gleichung (α) leicht erkennt, auch die linke Seite der Gleichung der Chordale zu Null machen. — Wenn also die beiden Kreise sich schneiden, so geht die Chordale durch die beiden Schnittpunkte. — Berühren sich die Kreise, so fällt die Chordale mit der gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspunkte der beiden Kreise zusammen. —

43) Nachzuweisen, dass die Chordale zweier Kreise senkrecht zur Centrallinie derselben steht.

44) Zu beweisen, dass die Chordalen von drei Kreisen durch einen Punkt gehen.

Beweis. Ist $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ die Gleichung des ersten der drei Kreise, und bezeichnet man die linke Seite der Gleichung mit K_1; ebenso die linken Seiten der Gleichungen der beiden anderen Kreise mit K_2 und K_3, so kann man die Gleichungen der Kreise in der abgekürzten Form:

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0$$

darstellen. Nach 42 sind nun die Gleichungen der drei Chordalen:

$$K_1 - K_2 = 0$$
$$K_2 - K_3 = 0$$
$$K_3 - K_1 = 0.$$

Weil die Summe dieser drei Gleichungen identisch Null giebt, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt. — Derselbe wird das Radikalcentrum der drei Kreise genannt. — Er ist der Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher die drei gegebenen Kreise unter rechtem Winkel schneidet. (Orthogonalkreis.)

45) Die Chordale zweier gegebenen Kreise durch Konstruktion zu finden.

46) Welches sind die Koordinaten des Radikalcentrums der drei Kreise:

$$x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + a_3 x + b_3 y + c_3 = 0?$$

Antw.
$$\frac{\begin{vmatrix} c_2 - c_1, & b_1 - b_2 \\ c_3 - c_1, & b_1 - b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 - a_2, & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3, & b_1 - b_3 \end{vmatrix}}, \quad \frac{\begin{vmatrix} a_1 - a_2, & c_2 - c_1 \\ a_1 - a_3, & c_3 - c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 - a_2, & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3, & b_1 - b_3 \end{vmatrix}}$$

47) Das Radikalcentrum der drei Kreise

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 4 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 12x + y - 8 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 10 = 0$$

zu finden.

Antw. Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind $(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$.

48) Macht man in der Gleichung eines Kreises

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

den Halbmesser $r = 0$, so erhält man:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0,$$

welcher Gleichung nur durch die Werte $x = \alpha$ und $y = \beta$ genügt werden kann. Sie stellt also nur einen Punkt (unendlich kleiner Kreis) dar. — Hat man nun die Gleichung zweier Kreise

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

und
$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = 0$$

von denen der letztere unendlich klein ist, so heisst die Gleichung der Chordale beider:

$$2(\alpha_1 - \alpha)x + 2(\beta_1 - \beta)y + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha_1{}^2 - \beta_1{}^2 - r^2 = 0.$$

Jede von einem Punkte Q dieser Geraden an den ersten der beiden Kreise gezogenen Tangente ist der Strecke von Q bis zum Punkte $(\alpha_1 \beta_1)$ gleich.

49) Bestimme die Koordinaten des Radikalcentrums der Kreise $x^2 + y^2 + 6x - 12y - 4 = 0$; $x^2 + y^2 = 0$; und des Punktes $M(16, 2)$.

50) Die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises zu finden, welcher durch die drei Punkte $M_1(4, 4)$; $M_2(12, 16)$; $M_3(20, 8)$ geht. —

Anl. zur Aufl. — Die Gleichung des Punktes M_1 kann in der Form der Gleichung eines unendlich kleinen Kreises mit den Mittelpunktskoordinaten (4, 4) geschrieben werden, nämlich:

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 0$$

oder $$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 32 = 0.$$

Ebenso stelle man die Gleichungen der unendlich kleinen Kreise mit den Mittelpunkten M_2 und M_3 auf und bestimme nach 46) die Koordinaten des Radikalcentrums. — Man findet für dieselben die Werte: $11\frac{3}{5}$, $7\frac{3}{5}$.

Geometrische Örter.

51) Den Ort des Punktes M zu finden, für welchen die Summe der Quadrate seiner Verbindungslinien mit zwei gegebenen festen Punkten A und B gleich k^2 ist.

Antw. Ist AB Abscissenachse und die Mitte C von AB der Anfangspunkt der Koordinaten, ferner $AC = BC = a$ so findet man als Gleichung des Ortes:

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2 - 2a^2}{2}.$$

Dies ist die Mittelpunktsgleichung eines Kreises, dessen Halbmesser $= \sqrt{\frac{k^2 - 2a^2}{2}}$ ist.

52) Es sind n Punkte: $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$ . . . . . $M_n(x_n y_n)$ gegeben. Man soll den Ort des Punktes $P(xy)$ so bestimmen, dass die Summe der Quadrate seiner Verbindungslinien mit M_1, . . . M_n gleich k^2 wird.

Antw. Die Gleichung des Ortes ist:

$$x^2 + y^2 - \frac{2(x_1 + x_2 + \cdots x_n)}{n} x - \frac{2(y_1 + y_2 + \cdots y_n)}{n}$$
$$+ (x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots x_n{}^2 + y_1{}^2 + y_2{}^2 + \cdots y_n{}^2 - k^2) : n = 0.$$

Dieselbe bedeutet einen Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}, \quad \frac{y_1 + y_2 + \cdots y_n}{n} \quad \text{hat.}$$

53) Den Ort des Punktes $M(xy)$ zu finden, dessen Verbindungsstrecken mit zwei gegebenen festen Punkten A und B ein bestimmtes Verhältnis $\frac{AM}{BM} = k$ haben.

Antw. Man findet als Ort einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf AB liegt. — Es ist noch zu zeigen, dass die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden AB, und die Punkte A und B, vier harmonische Punkte sind.

54) Es ist ein Punkt P und eine Gerade AB gegeben. — Man soll den Ort des Punktes M finden, für welchen das Quadrat der Entfernung von P dem Abstand des Punktes M von AB proportioniert ist.

Antw. Man findet einen Kreis, dessen Mittelpunkt in der von P auf AB gefällten Senkrechten liegt.

55) Den Ort des Punktes M zu finden, dessen Verbindungslinien mit 2 festen Punkten A und B einen gegebenen Winkel φ einschliessen. —

Antw. Nimmt man AB als Abscissenachse, die Mitte C als Anfangspunkt, und setzt man $AB = 2a$, so erhält man als Gleichung des Ortes:

$$x^2 + y^2 - 2ay \operatorname{cotg} \varphi - a^2 = 0.$$

Welches sind die Koordinaten des Mittelpunktes, und wie gross ist der Halbmesser des durch diese Gleichung bestimmten Kreises?

56) Eine Gerade von gegebener Länge a (Fig. 17) gleitet mit ihren Endpunkten B und C auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels $BAC = \varphi$. — In B und C werden Lote zu den Schenkeln AB und AC gezogen, welche sich in M treffen. — Man soll den Ort des Punktes M bestimmen.

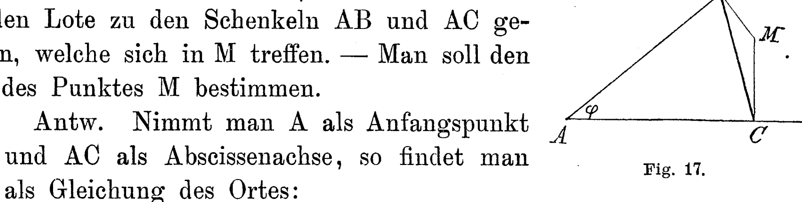


Fig. 17.

Antw. Nimmt man A als Anfangspunkt und AC als Abscissenachse, so findet man als Gleichung des Ortes:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \varphi},$$

welches die Mittelpunktsgleichung eines Kreises mit dem Halbmesser $\frac{a}{\sin \varphi}$ ist. —

57) Den Ort des Durchschnittes der drei Höhen eines Dreiecks zu finden, von welchem die Grundlinie a und der gegenüberliegende Winkel gegeben sind. —

Antw. Nimmt man a als Abscissenachse, den Endpunkt derselben als Anfangspunkt, so findet man als Gleichung des Ortes

$$x^2 + y^2 - ax + ay \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 0.$$

Dies ist ein Kreis, welcher durch die Endpunkte von a geht.

58) Drei durch einen Punkt A gehende Geraden sind gegeben. Von einem Punkte M(xy) werden Lote auf diese Geraden gefällt. — Die Fusspunkte dieser Lote bilden ein Dreieck von konstantem Inhalt. — Es soll der Ort des Punktes M bestimmt werden. —

Antw. Ist A der Anfangspunkt und eine der gegebenen Geraden die Abscissenachse, und sind die Winkel, welche die beiden anderen Geraden mit der ersten bilden α und β, so heisst die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$x^2 + y^2 = \frac{2F}{\sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha - \beta)},$$

worin F den konstanten Inhalt des Dreiecks bedeutet. — Dies ist aber die Mittelpunktsgleichung eines Kreises. —

Anmerkung. Der Ort des Punktes M ist auch ein Kreis, wenn die gegebenen Geraden nicht durch einen Punkt gehen. Man beweise noch den allgemeineren Satz: Wenn die Fusspunkte der Lote, welche man von einem Punkte M auf beliebig viele feste Geraden fällt, die Eckpunkte eines Vielecks von konstantem Inhalt bilden, so ist der Ort des Punktes M ein Kreis. —

59) Zu beweisen, dass der Ort eines Punktes, für welchen die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks konstant ist, ein Kreis sein muss.

60) Den Ort des Punktes M zu finden, für welchen die Summe der Quadrate seiner Abstände von den beiden aufeinander senkrechten Geraden $y - mx = 0$ und $my + x = 0$ gleich k^2 ist.

61) Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher durch die Eckpunkte des von den drei Geraden:

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 4 &= 0 \\ x - 4y + 12 &= 0 \\ x + y - 28 &= 0 \end{aligned}$$

eingeschlossenen Dreiecks geht. —

Anl. z. Auflösung. — Sind $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ die Gleichungen der drei Geraden, so ist:

$$kG_1G_2 + lG_1G_3 + G_2G_3 = 0$$

die Gleichung einer Kurve zweiten Grades, welche durch die drei Schnittpunkte der gegebenen Geraden geht. k und l sind beliebig hinzugefügte Faktoren. — Soll nun diese Gleichung einen Kreis ergeben, so muss (III, 17) der Faktor von x^2 gleich dem von y^2, und der Koeffizient von xy gleich Null sein. — Dies giebt zwei Gleichungen zur Bestimmung von k und l. — Auf die an-

gegebene Weise findet man für das obige Zahlenbeispiel:

$$5(x^2+y^2)-116x-76y+608=0.$$

Man beweise noch allgemein, dass die Gleichung des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist:

$$\alpha\beta \sin C+\alpha\gamma \sin B+\beta\gamma \sin A=0$$

wenn hierin A, B, C die drei Winkel des Dreiecks, und $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ die Normalgleichungen der drei Seiten sind. —

62) Fällt man von einem beliebigen Punkte des Umfanges des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises Lote auf die drei Seiten, so liegen die Fusspunkte derselben in einer Geraden.

Mit Hülfe der in 61) angegebenen Gleichung des Kreises zu beweisen.

Pol und Polare.

63) Die Mittelpunktsgleichung eines Kreises sei:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Man soll die Gleichung derjenigen Geraden aufstellen, welche durch die Berührungspunkte der vom Punkte M(a, b) an den Kreis gezogenen Tangenten geht. (Berührungssehne.)

Aufl. Sind die Koordinaten des Berührungspunktes einer Tangente x_1y_1 so heisst nach 29) d. Abschn. die Gleichung der Tangente:

$$xx_1+yy_1-r^2=0.$$

Soll die Tangente durch M gehen, so müssen die Koordinaten von M dieser Gleichung genügen. Es ist also:

$$ax_1+by_1-r^2=0.$$

Da nun zwei Tangenten von M aus möglich sind, so giebt es zwei Paare von Werten, welche für x_1y_1 gesetzt, dieser letzten Gleichung genügen müssen. — Folglich heisst die Gleichung der Geraden, welche durch beide Berührungspunkte geht:

$$ax+by-r^2=0.$$

Die Gleichung der Geraden, welche vom Mittelpunkt C des Kreises nach M geht, ist: $ay-bx=0$,

woraus man sieht, dass die Berührungssehne senkrecht zu dieser Geraden steht. —

Die Berührungssehne schneidet CM im Punkte

$$P\left(\frac{ar^2}{a^2+b^2}, \frac{br^2}{a^2+b^2}\right).$$

Bewegt sich M auf der Geraden:

$$ma+nb+1=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

(worin a und b die veränderlichen Koordinaten bedeuten), so dreht sich die Berührungssehne um einen festen Punkt Q. — Wird nämlich für a ein bestimmter Wert angenommen, so ergiebt sich aus (α) der zugehörige Wert von b. Hierdurch ist ein Punkt M der Geraden (α) bestimmt. — Durch Einsetzen dieser Werte von a und b in:

$$ax + by - r^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

erhält man die Gleichung der dem Punkte M entsprechenden Berührungssehne.

Eliminiert man b aus (α) und (β) so erhält die Gleichung der Berührungssehne die Form:

$$nax - may - y - nr^2 = 0$$

oder auch $$a(nx - my) - (y + nr^2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\gamma)$$

Jedem beliebig gewählten Werte von a entspricht ein bestimmter Punkt der Geraden (α) und aus (γ) ergiebt sich die Gleichung der zugehörigen Berührungssehne. Nach II, 50 geht aber die letztere durch den Schnittpunkt Q der beiden Geraden:

$$nx - my = 0 \quad \text{und} \quad y + nr^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

Da diese beiden Geraden unabhängig von a sind, so gehen alle den Punkten der Geraden (α) entsprechenden Berührungssehnen durch Q.

Die erste der beiden Geraden (δ) steht senkrecht zur Geraden (α). Der Punkt Q liegt demnach im Mittelpunkte derjenigen Berührungssehne, welche parallel zur Geraden (α) ist.

Der Punkt Q heisst der Pol der Geraden (α) in Bezug auf den gegebenen Kreis; umgekehrt nennt man die Gerade (α) die Polare des Punktes Q. —

64) Auf folgendem Wege, welcher noch weitergehende Schlussfolgerungen gestattet, gelangt man zu demselben Resultat. Es seien $M(x_1 y_1)$ und $N(x_2 y_2)$ zwei gegebene Punkte. — Um zu ermitteln, nach welchem Verhältnis der Umfang des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ die Strecke MN teilt, nimmt man auf der letzteren einen beliebigen Punkt P an, dessen Koordinaten

$$\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}, \quad \text{(s. I, 8)}$$

sein mögen. $\left(\text{k bedeutet hierin das Verhältnis } \frac{MP}{NP}\right)$. Soll nun P auf dem Kreise liegen, so müssen seine Koordinaten der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

genügen. — Dies giebt die Bedingungsgleichung:

$$\left(\frac{x_1 + k x_2}{1 + k}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + k y_2}{1 + k}\right)^2 - r^2 = 0,$$

oder nach Potenzen von k geordnet:

$$x_1^2 + y_1^2 - r^2 + 2k(x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2) + k^2(x_2^2 + y_2^2 - r^2) = 0.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergiebt für k zwei Werte, d. h. man erhält im allgemeinen zwei Schnittpunkte. — Verschwindet jedoch der Koeffizient der ersten Potenz von k, so wird die Gleichung eine rein quadratische, aus welcher folgt:

$$k = \pm \sqrt{-\frac{x_1^2 + y_1^2 - r^2}{x_2^2 + y_2^2 - r^2}}.$$

Der Kreis wird also in diesem Falle in zwei Punkten A und B geschnitten, welche das gleiche Abstandsverhältnis in Bezug auf die gegebenen Punkte M und N haben. Es sind alsdann A, B, M, N vier harmonische Punkte. — Die oben angegebene Bedingung für das Eintreten dieses Falles heisst:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Nimmt man in dieser Gleichung N als gegeben d. h. x_2 und y_2 als konstant an, so müssen die Koordinaten des Punktes M derselben Genüge leisten, wenn M, N, und die Schnittpunkte von MN mit dem Kreis vier harmonische Punkte bilden sollen. — Diese Gleichung bedeutet aber, wenn man x_1 und y_1 als Veränderliche betrachtet, eine Gerade. — Wenn man also durch N alle möglichen Strahlen zieht, und auf jedem zu N, und den beiden Schnittpunkten des Strahles mit dem Kreise, den vierten harmonischen Punkt konstruiert, so liegen die letzteren sämtlich auf einer Geraden (α), der Polare des Punktes N als Pol. Die Koordinaten der Geraden (α) erkennt man leicht, wenn man die Gleichung (α) auf die Form bringt:

$$x_1\left(-\frac{x_2}{r^2}\right) + y_1\left(-\frac{y_2}{r^2}\right) + 1 = 0.$$

Sie haben hiernach die Werte:

$$u_2 = -\frac{x_2}{r^2}, \quad v_2 = -\frac{y_2}{r^2}.$$

Ebenso kann man $x_2 y_2$ als veränderlich, $x_1 y_1$ als konstant ansehen, dann bedeutet (α) die Gleichung der Polare für den Punkt M als Pol. — Hieraus ergiebt sich der wichtige Satz:

Liegt M auf der Polare von N, so geht die Polare von M durch N; oder:

Bewegt sich M auf der Polare von N, so dreht sich die Polare von M um N.

Verbindet man M mit einem der beiden Schnittpunkte, in welchem die Polare von M den Kreis trifft, durch die Gerade T, so fallen ein Durchschnittspunkt des Strahles T mit dem Kreis und der Punkt, in welchem T die Polare von M trifft, zusammen. — Folglich muss auch der zweite Schnittpunkt des Strahles T und des Kreises mit diesem Punkte zusammenfallen, d. h. T ist eine Tangente. — Der Pol einer Tangente ist ihr Berührungspunkt, und umgekehrt: die Polare eines Punktes im Umfange des Kreises ist die den Kreis in diesem Punkte berührende Tangente.

65) Wie heisst die Gleichung der Polare des Punktes M (8, 12) in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - 25 = 0$?

Antw. $8x + 12y - 25 = 0$.

66) Welches sind die Koordinaten des Pols der Geraden $4x - 6y - 5 = 0$ in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - 10 = 0$?

Antw. $8, -12$.

67) Die Koordinaten des Pols der Geraden $ax + by + c$ in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ zu finden.

Antw. $\left(-\frac{ar^2}{c}, -\frac{br^2}{c}\right)$.

68) Die Gleichung der Polare des Punktes $M(x_1 y_1)$ in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ zu finden.

Antw. $(a + 2x_1)x + (b + 2y_1)y + ax_1 + by_1 + 2c = 0$.

69) Die Polare eines Punktes P in Bezug auf einen gegebenen Kreis K durch Ziehen gerader Linien zu finden. (Ohne Hülfe des Zirkels.)

Mit Hülfe der harmonischen Eigenschaften des Vierecks zu finden.

70) Von einem Punkte P aus Tangenten an einen Kreis K zu ziehen.

71) Durch einen Punkt M auf dem Umfang eines gegebenen Kreises eine Tangente an denselben zu legen.

72) Es sei ein Kreis K und ein Dreieck ABC gegeben. — Konstruiert man zu den Ecken des Dreiecks als Pole die zugehörigen Polaren, so bilden die letzteren ein neues Dreieck $A_1 B_1 C_1$ in welchem A_1 der Pol von BC, B_1 der Pol von AC und C_1 der Pol von AB ist. — Es soll bewiesen werden, dass die Verbindungslinien der Punkte A und A_1, B und B_1, C und C_1 sich in demselben Punkte treffen. —

Anl. z. Bew. — Die Koordinaten von A seien $x_1 y_1$, ebenso die der Ecken $B(x_2 y_2)$ und $C(x_3 y_3)$. Die Gleichungen der Polaren

von A, B und C sind alsdann:

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0$$
$$xx_2 + yy_2 - r^2 = 0$$
$$xx_3 + yy_3 - r^2 = 0.$$

Nach II, 54 ist nun die Gleichung der Geraden, welche den Punkt $A(x_1 y_1)$ mit dem Schnittpunkt A_1 der beiden Geraden:

$$xx_2 + yy_2 - r^2 = 0 \quad \text{und} \quad xx_3 + yy_3 - r^2 = 0$$

verbindet: $$\begin{vmatrix} (x\ x_2 + y\ y_2 - r^2), & (x\ x_3 + y\ y_3 - r^2) \\ (x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2), & (x_1 x_3 + y_1 y_3 - r^2) \end{vmatrix} = 0$$

oder: $$(xx_2 + yy_2 - r^2)(x_1 x_3 + y_1 y_3 - r^2)$$
$$- (xx_3 + yy_3 - r^2)(x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2) = 0.$$

Bildet man ebenso die Gleichungen der beiden Geraden BB_1 und CC_1 so ergiebt sich leicht der obige Satz.

73) Zieht man von den Berührungspunkten des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises mit den Seiten gerade Linien nach den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks, so schneiden dieselben sich in einem Punkte.

Beweis leicht mit Hülfe von 72. —

74) Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

mit K, so kann man die Gleichung eines Kreises durch die abgekürzte Form: $K = 0$ darstellen. — Sind nun $K = 0$ und $K_1 = 0$ zwei Kreise, so ist: $$K - K_1 = 0$$ nach (42 d. Abschn.) die Gleichung ihrer Chordale. — Dagegen ergiebt die Addition der Gleichungen, nämlich:

$$K + K_1 = 0 \quad \text{oder auch} \quad K + 1 \cdot K_1 = 0$$

wieder die Gleichung eines neuen Kreises, welcher durch die Schnittpunkte der Kreise $K = 0$, $K_1 = 0$ geht. — Man beweise nun allgemein, dass die drei Kreise:

$$K = 0, \quad K_1 = 0, \quad K + lK_1 = 0$$

eine gemeinschaftliche Chordale haben, auch wenn sie sich nicht schneiden.

75) Zu beweisen, dass die Chordale zweier Kreise, in deren Gleichungen das Absolutglied dasselbe ist, durch den Anfangspunkt geht.

76) Die Chordale der beiden Kreise:

$$x^2 + y^2 - 2ax + p^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2bx + p^2 = 0$$

ist die Ordinatenachse. — Die Subtraktion dieser Gleichungen ergiebt nämlich als Gleichung ihrer Chordale: $x = 0$.

Wenn demnach in der Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 2kx + p^2 = 0$$

k veränderlich ist, so entspricht jedem willkürlich gewählten Wert von k ein bestimmter Kreis. — Alle diese Kreise haben dieselbe Chordale, welche mit der Ordinatenachse zusammenfällt. — Schneiden sich zwei dieser Kreise, so gehen auch alle übrigen durch die beiden Schnittpunkte. —

77) Wenn beliebig viele Kreise durch zwei feste Punkte gehen, so schneiden die Polaren eines gegebenen Punktes $M(x_1 y_1)$ in Bezug auf alle diese Kreise sich in einem Punkte. —

Beweis: Ist $x^2 + y^2 - 2kx + p^2 = 0$

die Gleichung eines der Kreise, so heisst die Gleichung der Polare von M in Bezug auf diesen Kreis:

$$xx_1 + yy_1 - k(x - x_1) + p^2 = 0.$$

Diese Gerade geht aber, welchen Wert k auch haben mag, durch den Schnittpunkt der beiden Geraden:

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + p^2 &= 0 \\ x + x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Der Satz gilt auch wenn die gegebenen Kreise sich nicht in zwei festen Punkten schneiden, sondern eine gemeinschaftliche Chordale haben.

78) Welches sind die Koordinaten des Schnittpunktes aller Polaren des Punktes M (8, 12) in Bezug auf die Kreise, welche die Ordinatenachse in den Abständen $+4$ und -4 vom Anfangspunkt schneiden?

Antw. -8, $+6\frac{2}{3}$.

79) Ist wieder $x^2 + y^2 - 2kx + p^2 = 0$ (k als veränderlich betrachtet) die Gleichung einer Schar von Kreisen, welche eine gemeinschaftliche Chordale haben, so giebt es zwei Punkte M und N, deren Polaren in Bezug auf sämtliche Kreise unveränderlich sind. — Dieser Fall tritt ein, wenn die beiden in 77) gefundenen Gleichungen:

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + p^2 &= 0 \\ x + x_1 &= 0 \end{aligned}$$

zwei zusammenfallende Geraden bedeuten, welches alsdann die Polare des Punktes $M(x_1 y_1)$ ist. — Nun enthält die zweite Gleichung kein y; folglich können beide Gleichungen nur identisch sein, wenn:

$$y_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{p^2}{x_1} \quad \text{ist.}$$

Die Koordinaten von M sind in diesem Falle:

$$x_1 = \pm p, \quad y_1 = 0.$$

Man findet also zwei Punkte M und N, nämlich: M (p, 0) und N (— p, 0). — Die Polare des Punktes M in Bezug auf jeden der Kreise geht durch N, und umgekehrt. —

Die beiden Punkte M und N (Fig. 18) nennt man wohl die Grenzpunkte des gegebenen Kreissystems. Sie lassen sich leicht konstruieren.

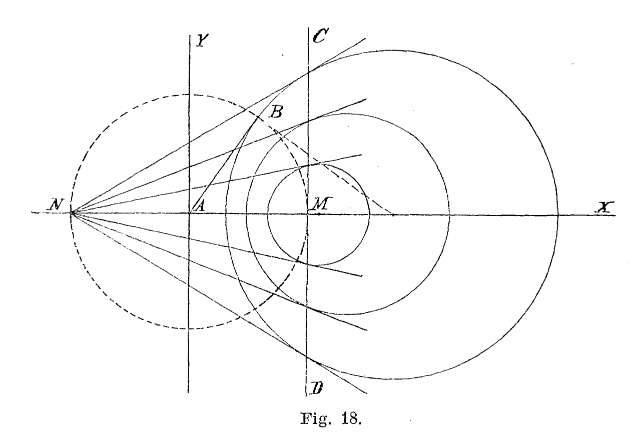


Fig. 18.

Bringt man nämlich die Gleichung $x^2 + y^2 - 2kx + p^2 = 0$ auf die Form:

$$(x - k)^2 + y^2 = k^2 - p^2$$

so erkennt man leicht, dass k die Abscisse des Mittelpunktes und $k^2 - p^2 = r^2$ das Quadrat des Halbmessers, also auch $p^2 = k^2 - r^2$ ist. — Zieht man deshalb an einen der Kreise des Systems vom Anfangspunkt A die Tangente AB, so ist $AB = k^2 - r^2 = p^2$. — Man zeichnet also mit dem Halbmesser AB um A einen Kreis; derselbe schneidet auf der Abscissenachse die gesuchten Punkte M und N ab. — Die Berührungspunkte aller Tangenten, welche von N aus an die Kreise der Gleichung $x^2 + y^2 - 2kx + p^2 = 0$ gezogen werden können, liegen auf einer zur Centrallinie senkrechten Geraden, welche die Polare des Punktes N in Bezug auf sämtliche Kreise ist. —

Anwendung der Linienkoordinaten auf den Kreis.

80) Wie heisst die Gleichung eines Kreises in Linienkoordinaten?

Antw. Sind α und β die Koordinaten des Mittelpunktes C, r der Halbmesser, u und v die Koordinaten einer Tangente, so heisst die Gleichung der letzteren in der Normalform:

$$\frac{ux + vy + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0.$$

Der Abstand dieser Geraden vom Mittelpunkte C soll gleich r sein, folglich ist nach (II, 63)

$$\frac{u\alpha + v\beta + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = r$$

oder: $$u\alpha + v\beta + 1 = r\sqrt{u^2 + v^2}.$$

Alle Paare von Werten der Koordinaten u und v welche dieser Gleichung genügen, bestimmen eine Tangente; folglich ist sie die Gleichung des Kreises in Linienkoordinaten. —

Sind α und $\beta = 0$, so erhält man die Mittelpunktsgleichung:

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}$$

für $\alpha = 0$ und $\beta = r$ oder $\alpha = r$ und $\beta = 0$ erhält man die Scheitelgleichungen:

$$2\,vr + 1 = r^2u^2$$
$$2\,ur + 1 = r^2v^2.$$

81) Die Koordinaten des Berührungspunktes der Tangente $T(u_1v_1)$ zu finden, wenn die Gleichung des Kreises ist:

$$u^2 + v^2 - \frac{1}{r^2} = 0.$$

Antw. Man findet: $-u_1r^2$, $-v_1r^2$.

82) Die Koordinaten der Tangenten des Kreises $u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}$ zu finden, welche der Geraden $P(u_1v_1)$ parallel sind.

Antw. $\pm\frac{u_1}{r\sqrt{u_1^2+v_1^2}}$, $\pm\frac{v_1}{r\sqrt{u_1^2+v_1^2}}$.

83) Die Koordinaten der Tangenten des Kreises $u^2 + v^2 = \frac{1}{25}$ zu finden, welche von dem Punkte M (9, 12) an denselben gezogen werden können. —

Antw. $\frac{-9 \mp 4\sqrt{72}}{225}$, $\frac{-4 \pm 6\sqrt{2}}{75}$.

84) Die Koordinaten der Tangenten des Kreises $u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}$ zu finden, welche von dem Schnittpunkt der beiden Geraden $G_1(u_1v_1)$, $G_2(u_2v_2)$ an denselben gezogen werden können.

Aufl. Die Koordinaten einer beliebigen Geraden G, welche durch den Schnittpunkt von G_1 und G_2 geht, sind:

$$\frac{u_1 + ku_2}{1 + k}, \quad \frac{v_1 + kv_2}{1 + k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Soll diese Gerade den Kreis berühren, so müssen die Koordinaten der Gleichung des Kreises genügen. — Es muss also sein:

$$\left(\frac{u_1 + k u_2}{1 + k}\right)^2 + \left(\frac{v_1 + k v_2}{1 + k}\right)^2 = \frac{1}{r^2}$$

oder: $$u_1{}^2 + v_1{}^2 - \frac{1}{r^2} + 2k\left(u_1 u_2 + v_1 v_2 - \frac{1}{r^2}\right)$$
$$+ k^2\left(u_2{}^2 + v_2{}^2 - \frac{1}{r^2}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Aus dieser Gleichung kann man k bestimmen und in (a) einsetzen, wodurch man die gesuchten Koordinaten der beiden Tangenten erhält. —

Ist nun in (b) der Koeffizient von $k = 0$, so erhält man eine reine quadratische Gleichung, aus welcher folgt:

$$k = \pm \sqrt{-\frac{u_1{}^2 + v_1{}^2 - \frac{1}{r^2}}{u_2{}^2 + v_2{}^2 - \frac{1}{r^2}}}.$$

Der Kreis wird also in diesem Falle von zwei Tangenten berührt, deren Abstandsverhältnis von den beiden Geraden G_1 und G_2 gleich ist. — Hiernach bilden die beiden Tangenten mit G_1 und G_2 vier harmonische Strahlen. — Die oben angegebene Bedingung für das Eintreten dieses Falles ist:

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - \frac{1}{r^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf u_1, v_1 sowohl als u_2, v_2 vom ersten Grade. Nimmt man demnach $G_2(u_2 v_2)$ als feste und $G_1(u_1 v_1)$ als bewegliche Gerade, so bedeutet (c) einen Punkt, den Pol der Geraden G_2. — Die Koordinaten desselben erkennt man leicht, wenn man die Gleichung (c) auf die Form:

$$u_1(-u_2 r^2) + v_1(-v_2 r^2) + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

bringt. Sie haben hiernach die Werte: $x_2 = -u_2 r^2$, $y_2 = -v_2 r^2$. — Von jedem Punkte M der festen Geraden $G_2(u_2 v_2)$ kann man zwei Tangenten an den Kreis ziehen, welche mit G_2 und der von M nach dem Pol von G_2 gehenden Geraden vier harmonische Strahlen bilden. — Ebenso bedeutet (c) die Gleichung des Pols der Geraden $G_1(u_1 v_1)$, wenn man diese als feste, und G_2 als bewegliche Gerade ansieht. — Weil die Vertauschung von u_1 und v_1 mit u_2 und v_2 die Gleichung (c) nicht ändert, so folgt: Geht G_1 durch den Pol von G_2, so liegt der Pol von G_1 auf G_2, oder:

Dreht sich G_1 um den Pol von G_2, so bewegt sich der Pol von G_1 auf G_2. —

Vergl. diese Ableitung mit der in 64) angegebenen. Man erkennt aus der Beziehung zwischen den Koordinaten eines gegebenen Punktes $(x_2 y_2)$ und den Koordinaten $(u_2 v_2)$ seiner Polare die Übereinstimmung beider. —

Sind G_1 und G_2 (Fig. 19) zwei Geraden, welche mit den von ihrem Schnittpunkte P an den Kreis gezogenen Tangenten T_1 und T_2

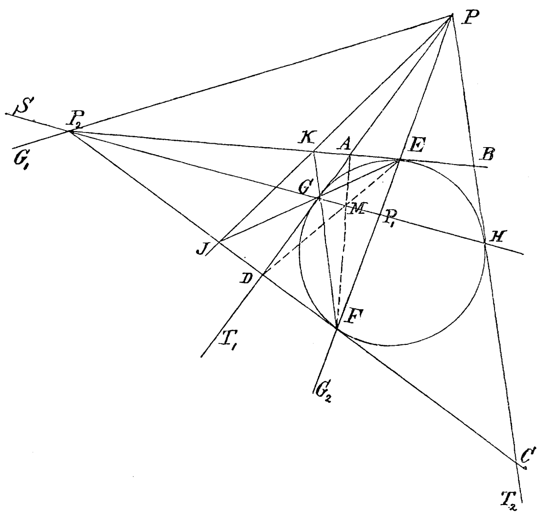


Fig. 19.

vier harmonische Strahlen bilden, so ist die Polare von P die Berührungssehne S der beiden Tangenten. Dieselbe schneidet G_1 in P_2 und G_2 in P_1. — Bewegt sich P auf G_1, so dreht sich S um P_1. — Da nun die Polare von P durch P_2 geht, so liegt P auf der Polare von P_2. — Die letztere ist also die Gerade P_1P. — Verbindet man nun P_2 mit den Schnittpunkten E und F, so sind P_2E und P_2F Tangenten des Kreises. — Hieraus ergiebt sich leicht folgender Satz: Ist ein Viereck ABCD einem Kreise umbeschrieben, so liegen die Berührungspunkte zweier gegenüberliegenden Seiten und der Schnittpunkt der beiden anderen Seiten des Vierecks auf einer Geraden. —

Man beweise auch, dass P_1 der Durchschnitt der beiden Diagonalen des Vierecks ist. —

Zieht man in dem Viereck ADFE die Diagonalen, so schneiden

sich dieselben im Punkte M. Projiciert man nun die Punktreihe S aus den Mittelpunkten E und F bez. auf P_2F und P_2E, so sind A und D Projektionen von M, K und J Projektionen von G; E und F Projektionen von P_1. — Die beiden projektivischen Punktreihen P_2KAE und P_2JDF haben aber den Punkt P_2 entsprechend gemeinschaftlich, folglich schneiden sich die Geraden JK, AD, EF in einem Punkte P. —

Das Dreieck EFG ist dem Kreise einbeschrieben. EK, AD, FJ sind die Tangenten des Kreises in den Eckpunkten des Dreiecks. Hieraus folgt der Satz:

Wenn ein Dreieck einem Kreise einbeschrieben ist, so liegen die Punkte, in welchen die Tangenten in den Eckpunkten des Dreiecks die bez. gegenüberliegenden Seiten desselben treffen, auf einer Geraden.

85) Drei Punkte A, B, und C eines Kreises und die Tangenten in A und B sind gegeben. Man soll die Tangente im Punkte C konstruieren. —

86) Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher die drei Geraden $P_1(u_1 v_1)$, $P_2(u_2 v_2)$, $P_3(u_3 v_3)$ berührt. —

Antw.
$$\begin{vmatrix} \sqrt{u^2 + v^2}, & u, & v, & 1 \\ \sqrt{u_1^2 + v_1^2}, & u_1, & v_1, & 1 \\ \sqrt{u_2^2 + v_2^2}, & u_2, & v_2, & 1 \\ \sqrt{u_3^2 + v_3^2}, & u_3, & v_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ist der Koeffizient von $\sqrt{u^2 + v^2}$, nämlich die Unterdeterminante:

$$\begin{vmatrix} u_1 v_1 1 \\ u_2 v_2 1 \\ u_3 v_3 1 \end{vmatrix} = 0$$

so geht die Gleichung des Kreises in eine Gleichung ersten Grades über, und bedeutet alsdann einen Punkt. — Das Verschwinden dieser Unterdeterminante zeigt somit an, dass die drei gegebenen Geraden durch einen Punkt gehen. — Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher die drei Geraden

$$3x + 4y - 12 = 0$$
$$8x - 15y + 24 = 0$$
$$12x + 5y - 48 = 0$$

berührt.

Antw. $44\sqrt{u^2+v^2} - 8u + 28v - 11 = 0$;

Man bestimme auch die Gleichungen der drei übrigen Kreise. —

87) Wann berühren die vier Geraden $P_1(u_1 v_1)$, $P_2(u_2 v_2)$, $P_3(u_3 v_3)$, $P_4(u_4 v_4)$ denselben Kreis?

Antw. Wenn: $\begin{vmatrix} \sqrt{u_1^2+v_1^2}, & u_1, & v_1, & 1 \\ \sqrt{u_2^2+v_2^2}, & u_2, & v_2, & 1 \\ \sqrt{u_3^2+v_3^2}, & u_3, & v_3, & 1 \\ \sqrt{u_4^2+v_4^2}, & u_4, & v_4, & 1 \end{vmatrix} = 0$ ist.

88) Es seien:

$$\left.\begin{aligned} u\alpha + v\beta + 1 - r\sqrt{u^2+v^2} &= 0 \\ \text{und} \quad u\alpha_1 + v\beta_1 + 1 - r_1\sqrt{u^2+v^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

die Gleichungen von zwei Kreisen. — Multipliciert man die erste mit r_1 und die zweite mit r und subtrahiert alsdann die Gleichungen voneinander, so erhält man:

$$u(\alpha r_1 - \alpha_1 r) + v(\beta r_1 - \beta_1 r) + r - r_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Diese Gleichung, welche in Bezug auf u und v vom ersten Grade ist, bedeutet einen Punkt A. — Diejenigen Werte von u und v, welche den Gleichungen der beiden Kreise zugleich genügen, müssen auch die linke Seite der Gleichung (b) zu Null machen. — Der Punkt A ist deshalb der Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise, und man nennt ihn den Ähnlichkeitspunkt derselben. —

Da $\sqrt{u^2+v^2}$ in den Gleichungen der beiden Kreise mit verschiedenen Vorzeichen genommen werden kann, so erhält man noch einen zweiten Ähnlichkeitspunkt, dessen Gleichung ist:

$$u(\alpha r_1 + \alpha_1 r) + v(\beta r_1 + \beta_1 r) + r_1 + r = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Man nennt (b) den äusseren und (c) den inneren Ähnlichkeitspunkt. —

89) Welches sind die Koordinaten der beiden Ähnlichkeitspunkte der Kreise:

$$\begin{aligned} u\alpha + v\beta + 1 - r\sqrt{u^2+v^2} &= 0 \\ u\alpha_1 + v\beta_1 + 1 - r_1\sqrt{u^2+v^2} &= 0\,? \end{aligned}$$

Antw. Man findet:

$$\frac{\alpha r_1 - \alpha_1 r}{r - r_1}, \quad \frac{\beta r_1 - \beta_1 r}{r - r_1} \quad \text{für den äusseren, und}$$

$$\frac{\alpha r_1 + \alpha_1 r}{r + r_1}, \quad \frac{\beta r_1 + \beta_1 r}{r + r_1} \quad \text{für den inneren Ähnlichkeitspunkt.}$$

90) Nachzuweisen, dass die beiden Ähnlichkeitspunkte auf der Centrallinie der beiden Kreise liegen.

91) Die beiden Ähnlichkeitspunkte und die Mittelpunkte der Kreise sind vier harmonische Punkte. —

92) Setzt man in der Gleichung des Kreises

$$u\alpha + v\beta + 1 = r\sqrt{u^2 + v^2}$$

die linke Seite $= Q$, so kann man die Gleichung in der abgekürzten Form:

$$\frac{Q}{r} = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \text{oder} \quad \frac{Q^2}{r^2} = u^2 + v^2$$

schreiben. — Die Gleichung eines zweiten Kreises sei:

$$\frac{Q_1^{\,2}}{r_1^{\,2}} = u^2 + v^2;$$

dann findet man durch Subtraktion:

$$\frac{Q^2}{r^2} - \frac{Q_1^{\,2}}{r_1^{\,2}} = 0$$

welche in die beiden Gleichungen $\frac{Q}{r} + \frac{Q_1}{r_1} = 0$ und $\frac{Q}{r} - \frac{Q_1}{r_1} = 0$ zerfällt. — Es sind die letzteren offenbar wieder die Gleichungen der beiden Ähnlichkeitspunkte. —

93) Es seien

$$\frac{Q_1^{\,2}}{r_1^{\,2}} = u^2 + v^2; \quad \frac{Q_2^{\,2}}{r_2^{\,2}} = u^2 + v^2; \quad \frac{Q_3^{\,2}}{r_3^{\,2}} = u^2 + v^2$$

drei Kreise, dann sind die Gleichungen der äusseren Ähnlichkeitspunkte:

$$\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2} = 0, \quad \frac{Q_2}{r_2} - \frac{Q_3}{r_3} = 0, \quad \frac{Q_3}{r_3} - \frac{Q_1}{r_1} = 0$$

und die der inneren:

$$\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} = 0, \quad \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_3}{r_3} = 0, \quad \frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3} = 0.$$

Es soll gezeigt werden, dass die drei äusseren Ähnlichkeitspunkte in gerader Linie liegen. — Ebenso je zwei innere und ein äusserer Ähnlichkeitspunkt. —

Jede der Geraden, auf welcher drei Ähnlichkeitspunkte liegen, heisst eine Ähnlichkeitsachse der drei Kreise.

94) Aus der Planimetrie ist bekannt, dass jede Gerade, welche die Endpunkte zweier parallelen und gleichgerichteten Radien zweier Kreise verbindet, durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise geht. Sind die Radien entgegengesetzt gerichtet, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte durch den inneren Ähnlichkeitspunkt. — Der Berührungspunkt zweier Kreise ist bei äusserer Berührung ein innerer,

bei innerer Berührung ein äusserer Ähnlichkeitspunkt. — Ein Strahl, welcher durch einen Ähnlichkeitspunkt geht, schneidet im allgemeinen die Kreise in zwei Paaren homologer Punkte. — Zieht man durch einen Ähnlichkeitspunkt zwei Strahlen, so liegen je zwei Paare nicht homologer Punkte auf einem Kreise. So sind z. B. in den Figuren 20 die Punkte $abc'd'$ sowohl als auch $a'b'cd$ die Ecken von Kreisvierecken. — Berührt ferner ein Kreis zwei andere Kreise, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen Ähnlichkeitspunkt der letzteren. —

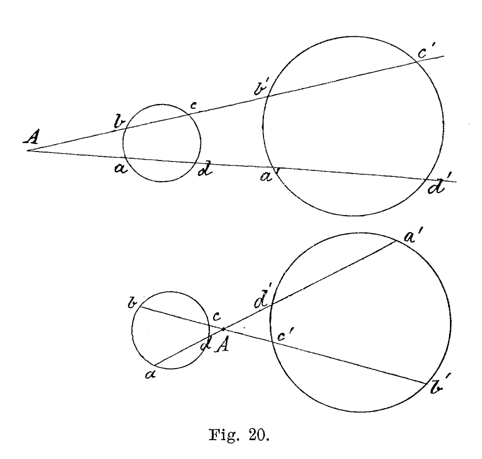


Fig. 20.

95) Werden zwei Kreise K_1 und K_2 von zwei anderen Kreisen P_1 und P_2 berührt, dann liegt der Ähnlichkeitspunkt des einen Paares auf der Chordale des anderen Paares.

96) Einen Kreis zu konstruieren, welcher drei gegebene Kreise K_1, K_2 und K_3 berührt. (Problem des Appollonius.)

Antw. Es sind im allgemeinen acht Kreise möglich. — Die Konstruktion des inneren und äusseren Berührungskreises ist aus Fig. 21 zu ersehen. Sind nämlich P_1 und P_2 die gesuchten Kreise, so liegt nach 95) der Ähnlichkeitspunkt A_1 von K_1 und K_2 auf der Chordale von P_1 und P_2, dasselbe gilt für die Ähnlichkeitspunkte A_2 und A_3 von K_1 und K_3 bez. K_2 und K_3; folglich ist die Ähnlichkeitsachse $A_3A_1A_2$ der drei gegebenen Kreise die Chordale der Kreise P_1 und P_2. — Ferner gehen die Chordalen von K_1 und K_2, von K_1 und K_3 und von K_2 und K_3 durch den Ähnlichkeitspunkt C der Kreise P_1 und P_2, somit ist C das Radikalcentrum der gegebenen Kreise K_1, K_2 und K_3. Nach 94) gehen nun die Berührungssehnen a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 durch den Ähnlichkeitspunkt C von P_1 und P_2.

Zieht man in a_3 und b_3 die Tangenten an K_3, so müssen dieselben in einem Punkte q_3 auf A_3A_2 zusammentreffen. q_3 ist dann das Radikalcentrum der drei Kreise P_1, K_3 und P_2, und zugleich der Pol der Berührungssehne a_3b_3 in Bezug auf den Kreis K_3. — Folglich liegt auch der Pol p_3 von A_3A_2 auf a_3b_3 (s. 64 d. Abschn.). —

Ebenso liegen die Pole p_1 und p_2 der Ähnlichkeitsachse A_3A_2, in Bezug auf die beiden anderen Kreise K_1 und K_2, auf den Berührungssehnen a_1b_1, bez. a_2b_2. —

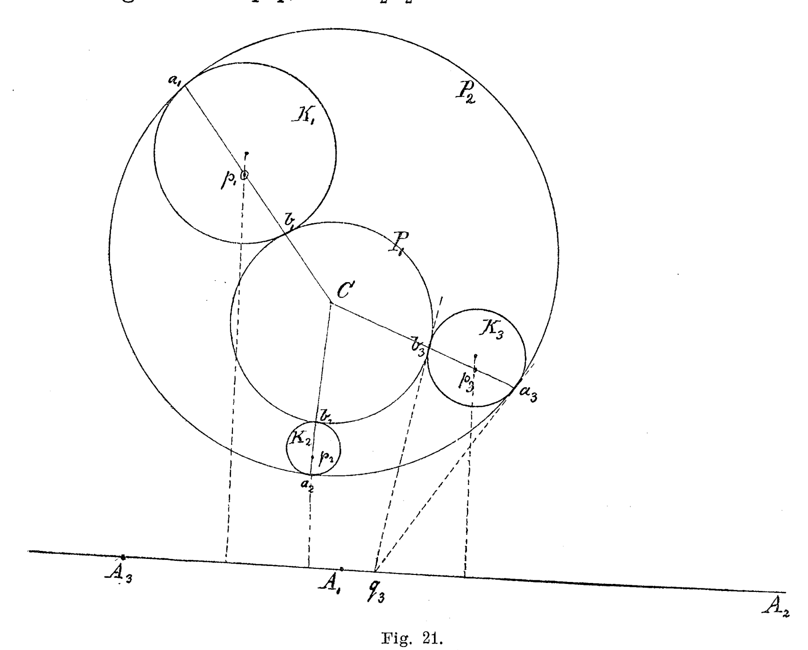


Fig. 21.

Man bestimme also das Radikalcentrum C der drei gegebenen Kreise und die Pole p_1, p_2, p_3 der Ähnlichkeitsachse in Bezug auf dieselben. — Verbindet man C mit den drei Polen p_1, p_2, p_3 durch gerade Linien, so schneiden diese die drei Kreise K_1, K_2, K_3 in den Berührungspunkten der gesuchten Kreise, wodurch die letzteren nun vollständig bestimmt sind. —

Man konstruiere in gleicher Weise die übrigen Berührungskreise. —

Andere Lösungen dieser Aufgabe sind in VIII (A, 13 und B, 13) angegeben. —

Anwendung der Polarkoordinaten.

97) Wie heisst die Polargleichung des Kreises vom Halbmesser a, wenn der Pol im Mittelpunkt des Kreises liegt? Antw. $r = a$.

98) Die Polargleichung des Kreises zu finden, wenn der Pol im Umfang des Kreises liegt und der feste Schenkel des Winkels φ 1) ein Durchmesser, 2) eine Tangente ist.

Antw. 1) $r = 2\,a \cos \varphi$, 2) $r = 2\,a \sin \varphi$.

99) Die Polargleichung des Kreises vom Halbmesser a zu finden, wenn der Mittelpunkt auf dem festen Schenkel des veränderlichen Winkels φ, in der Entfernung e vom Pol liegt.

Antw. $a^2 = r^2 + e^2 - 2\,er \cdot \cos\varphi$.

100) Die Gerade, welche den Mittelpunkt des Kreises vom Halbmesser a mit dem Pol verbindet, habe die Länge e, und sie bilde mit dem festen Schenkel des Winkels φ den gegegebenen Winkel δ. — Wie heisst die Gleichung des Kreises?

Antw. $a^2 = r^2 + e^2 - 2\,er\cos(\varphi - \delta)$.

101) Die Gleichung eines Kreises sei $a^2 = r^2 + e^2 - 2\,er\cos\varphi$. Die Längen der zu einem gegebenen Winkel φ gehörigen Leitstrahlen zu finden.

Antw. $r_1 = e\cos\varphi + \sqrt{a^2 - e^2\sin^2\varphi}$,

$r_2 = e\cos\varphi - \sqrt{a^2 - e^2\sin^2\varphi}$.

102) Den Ort der Mitten aller Sehnen zu finden, welche sich in einem festen Punkte P innerhalb oder ausserhalb des Kreises schneiden.

Antw. Ist e die Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkt M des Kreises, P der Pol und PM der feste Schenkel des veränderlichen Winkels φ, so ergiebt sich als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$r = e\cos\varphi,$$

derselbe ist ein Kreis, dessen Durchmesser e ist.

103) Nachzuweisen, dass das Produkt der beiden von einem beliebigen Punkte nach einem Kreise gehenden Leitstrahlen, welche in derselben Geraden liegen, konstant ist. — (Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis.) Für einen ausserhalb liegenden Punkt ist die Potenz desselben dem Quadrat einer von dem Punkt an den Kreis gezogenen Tangente gleich.

104) Die Gleichung eines Kreises sei $a^2 = r^2 + e^2 - 2\,er \cdot \cos\varphi$. — Vom Pol P wird ein beliebiger Leitstrahl gezogen. Man soll den Ort des vierten harmonischen Punktes zu P und den beiden Schnittpunkten des Strahls mit dem Kreise bestimmen.

Antw. Als Gleichung des Ortes findet man $r = \frac{e^2 - a^2}{e\cos\varphi}$. Dieselbe bedeutet eine Gerade, welche senkrecht zur festen Achse steht. Ihre Entfernung von P ist $\frac{e^2 - a^2}{e}$, und vom Mittelpunkt des Kreises hat sie den Abstand $\frac{a^2}{e}$. — Diese Gerade ist die Polare des Punktes P. (s. 64.)

Der Strahl, welcher von P nach dem Mittelpunkt des Kreises geht, wird von der Polare des Punktes P, in P′ geschnitten. — P und P′ stehen noch in der Beziehung zu einander, dass das Produkt ihrer Entfernungen vom Mittelpunkt des Kreises gleich dem Quadrat des Halbmessers ist. —

105) Das Dreieck ABC dreht sich um die feste Ecke A. — Der Punkt B bewegt sich auf der gegebenen Geraden MN. Welches ist der Ort des dritten Eckpunktes C, wenn $\angle BAC = \alpha$, und das Rechteck aus den Seiten AB und $AC = k^2$ gegeben ist. —

Antw. Ist A der Pol und die Senkrechte von A auf MN der feste Schenkel des veränderlichen Winkels φ, so ergiebt sich als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$r = \frac{k^2}{c} \cos(\varphi - \alpha)$$

worin c den Abstand des Punktes A von MN bedeutet. Diese Gleichung stellt einen Kreis dar.

IV. Abschnitt.

Die Kegelschnitte.

A. Die Ellipse.

1) Die Ellipse ist der geometrische Ort eines Punktes M, für welchen die Summe seiner Entfernungen von zwei gegebenen Punkten B und C konstant ist. — Fig. 22.

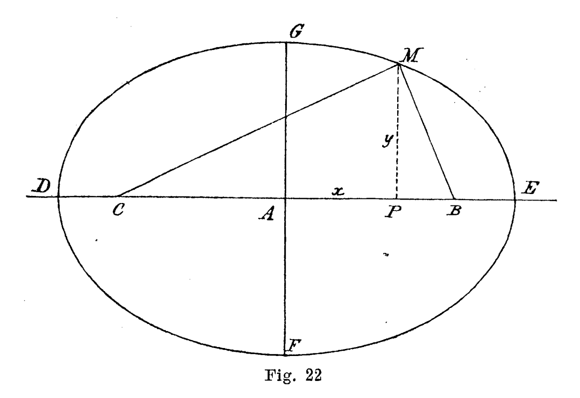


Fig. 22

Es sei die durch B und C gehende Gerade die Abscissenachse, die Mitte A zwischen B u. C der Anfangspunkt der Koordinaten. — Ist nun $AB = AC = e$; ferner für einen beliebigen Punkt M der Ellipse:

$$BM + CM = 2\,a,$$

so erhält man, wenn zur Abkürzung $a^2 - e^2 = b^2$ gesetzt wird, als Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

welche sich auch schreiben lässt:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \ldots \ldots \quad (\beta)$$

oder auf y reduciert, heisst:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \ldots \ldots \quad (\gamma)$$

Anmerkung. A und B heissen die Brennpunkte der Ellipse; e die Excentricität.

2) Wo schneidet die Ellipse die Koordinatenachsen?

Antw. Die Abscissenachse wird in den Abständen $\pm a$, die Ordinatenachse in den Abständen $\pm b$ vom Anfangspunkt geschnitten. — Die Strecke DE, Fig. 22, ist also gleich 2 a und die Strecke FG = 2 b. — Erstere heisst die grosse, letztere die kleine Achse der Ellipse.

3) Nachzuweisen dass die Ellipse symmetrisch gegen jede der beiden Achsen liegt, und deshalb jede durch den Mittelpunkt A gehende, von der Ellipse begrenzte Gerade in A halbiert wird. — (Durchmesser der Ellipse.)

4) Es soll gezeigt werden, dass von allen Durchmessern der Ellipse die grosse Achse DE der grösste, und die kleine Achse FG der kleinste ist.

Anl. z. Bew. Ist $P(x_1y_1)$ irgend ein Punkt der Ellipse, so ist

$$AP^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2.$$

Da x_1 und y_1 der Gleichung der Ellipse genügen müssen, so ist nach Gleichung (γ) in 1):

$$y_1{}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1{}^2) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_1{}^2;$$

folglich:

$$\begin{aligned} AP^2 &= x_1{}^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_1{}^2 \\ &= b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x_1{}^2 \\ &= b^2 + \frac{e^2}{a^2}x_1{}^2 \end{aligned}$$

woraus ersichtlich ist, dass $AP > b$. — Ebenso beweise man, dass $AP < a$, woraus sich die obige Behauptung ergiebt. —

5) Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse enthält nur zwei Konstanten a und b. — Wenn deshalb die Achsen der Ellipse mit den Koordinatenachsen zusammenfallen sollen, so ist die Ellipse durch zwei ihrer Punkte bestimmt. —

Wie heisst hiernach die Gleichung der Ellipse, welche durch die beiden Punkte $M_1(9, 8)$, $M_2(12, 6)$ geht? Wie gross sind a, b und e?

Antw. Die Gleichung der Ellipse ist: $9y^2 + 4x^2 = 900$;

$$a = 15, \quad b = 10, \quad e = 5\sqrt{5}.$$

6) Wo schneidet die Gerade $3y - 14x + 150 = 0$ die Ellipse $9y^2 + 4x^2 = 900$?

Antw. Die Koordinaten der beiden Schnittpunkte sind:

$$(12, 6) \quad \text{und} \quad (9, -8).$$

7) Die Gleichung der Tangente zu finden, welche die Ellipse im Punkte $M(x_1 y_1)$ berührt.

Aufl. — Ist $N(x_2 y_2)$ ein zweiter Punkt der Ellipse, so heisst die Gleichung der durch M und N gehenden Sekante:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Die Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, dass M und N auf der Ellipse liegen, sind:

$$a^2 y_1{}^2 + b^2 x_1{}^2 = a^2 b^2$$
$$a^2 y_2{}^2 + b^2 x_2{}^2 = a\ b^2.$$

Aus diesen Gleichungen findet man durch Subtraktion:

$$a^2(y_2 + y_1)(y_2 - y_1) + b^2(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = 0,$$

woraus folgt: $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung der Sekante MN ein, so heisst dieselbe: $$y - y_1 = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}(x - x_1).$$

Die Sekante geht in die Tangente über, wenn N mit M zusammenfällt. Setzt man deshalb in der letzten Gleichung $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ so erhält man als Gleichung der Tangente:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Multipliciert man auf beiden Seiten mit $a^2 y_1$ und beachtet, dass

$$a^2 y_1{}^2 + b^2 x_1{}^2 = a^2 b^2$$

sein muss, so erhält die Gleichung der Tangente die einfachere Form:

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x - a^2 b^2 = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

8) Wo schneidet die Tangente im Punkte $M(x_1y_1)$ der Ellipse die Koordinatenachsen?

Antw. In den Abständen $\frac{a^2}{x_1}$ und $\frac{b^2}{y_1}$ vom Anfangspunkt.

Mit Hülfe jedes dieser Ausdrücke soll die Tangente konstruiert werden. —

9) Unter Normale einer Kurve in einem gegebenen Punkte derselben versteht man diejenige Gerade, welche durch den Punkt geht und senkrecht zur Tangente steht. — Wie heisst die Gleichung der Normale der Ellipse im Punkte $M(x_1y_1)$?

Antw. $$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1),$$

oder $$a^2y_1x - b^2x_1y - (a^2 - b^2)x_1y_1 = 0.$$

10) Welche Strecken schneidet die Normale im Punkte $M(x_1y_1)$ auf den Koordinatenachsen ab?

Antw. Man findet: $\frac{e^2x_1}{a^2}$, $-\frac{e^2y_1}{b^2}$.

11) Zu beweisen, dass die Punkte, in welchen die Tangente und Normale in M die Abscissenachse schneiden, und die beiden Brennpunkte der Ellipse harmonisch sind. —

12) Unter Länge einer Tangente versteht man die Strecke vom Berührungspunkt bis zu ihrem Durchschnitt mit der Abscissenachse. Die auf der Abscissenachse liegende Projektion dieser Strecke heisst die Subtangente. — Ebenso Normale und Subnormale. — Die Längen der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale im Punkte $M(x_1y_1)$ zu bestimmen.

Aufl. Man findet:

$$\frac{\sqrt{(a^2 - x_1^2)(a^4 - e^2x_1^2)}}{ax_1}; \quad \frac{\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}}{a^2}; \quad \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}; \quad \frac{b^2x_1}{a^2}.$$

13) Den Abstand der Tangente im Punkte $M(x_1y_1)$ vom Mittelpunkt der Ellipse zu bestimmen. —

Antw. $$\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}}.$$

14) Wie gross sind Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale für den Endpunkt der Sehne, welche durch einen Brennpunkt geht und senkrecht zur Abscissenachse steht? —

Antw. $$\frac{b^2\sqrt{a^2 + e^2}}{ae}; \quad \frac{b^2}{a^2}\sqrt{a^2 + e^2}; \quad \frac{b^2}{e}; \quad \frac{b^2e}{a^2}.$$

15) Zu beweisen, dass das Produkt aus der Normale im Punkte $M(x_1 y_1)$ und dem Abstand der Tangente in M, vom Mittelpunkte der Ellipse gleich b^2 ist.

16) Es soll bewiesen werden, dass das Produkt der Lote, welche man von den Brennpunkten einer Ellipse auf irgend eine Tangente fällen kann, konstant, und zwar gleich b^2 ist.

17) Die Koordinaten des Berührungspunktes der Tangenten zu finden, welche vom Punkte $P(\alpha, \beta)$ an die Ellipse: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ gezogen werden können.

Antw. Sind x_1 und y_1 die gesuchten Koordinaten, so ist:

$$x_1 = \frac{a^2b^2\alpha \pm a^2\beta \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2};$$

$$y_1 = \frac{a^2b^2\beta \mp b^2\alpha \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

18) Verbindet man in Aufg. 17 den Punkt $P(\alpha, \beta)$ mit dem Mittelpunkte der Ellipse durch eine Gerade, so halbiert dieselbe die Berührungssehne der beiden Tangenten.

19) Die Normale im Punkte M treffe die Abscissenachse im Punkte N. — Es soll bewiesen werden, dass sich verhält:

$$\frac{BN}{CN} = \frac{BM}{CM}. \quad \text{(Fig. 23.)}$$

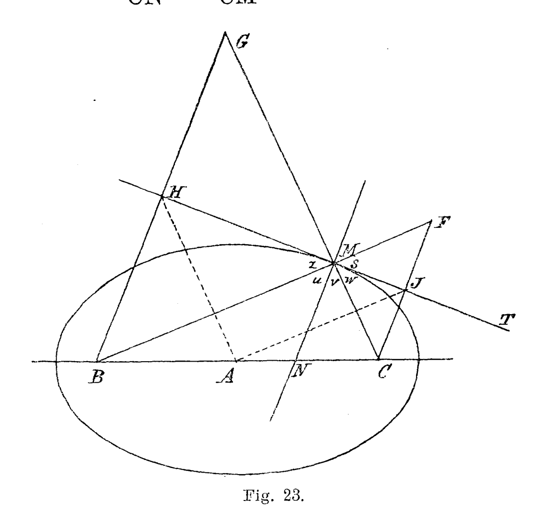


Fig. 23.

Beweis. Sind $x_1 y_1$ die Koordinaten von M so ist:

$$\frac{BM^2}{CM^2} = \frac{y_1{}^2 + (e + x_1)^2}{y_1{}^2 + (e - x_1)^2}.$$

Aus der Gleichung der Ellipse folgt: $y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2)$; setzt man diesen Wert in die vorige Gleichung ein, so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\frac{BM^2}{CM^2} = \frac{a^2 + 2\,ex_1 + \frac{e^2x_1^2}{a^2}}{a^2 - 2\,ex_1 + \frac{e^2x_1^2}{a^2}}$$ oder wenn man beiderseitig die Quadratwurzel nimmt:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{a + \frac{ex_1}{a}}{a - \frac{ex_1}{a}} = \frac{a^2 + ex_1}{a^2 - ex_1}.$$

Nach 10) ist die Strecke $AN = \frac{e^2x_1}{a^2}$, folglich:

$$\frac{BN}{CN} = \frac{e + \frac{e^2x_1}{a^2}}{e - \frac{e^2x_1}{a^2}} = \frac{a^2 + ex_1}{a^2 - ex_1}.$$

Es ist also: $\frac{BN}{CN} = \frac{BM}{CM}$, woraus nach einem bekannten Satze der Planimetrie folgt, dass die Normale MN den Winkel BMC halbiert. —

2. Beweis. Tangente und Normale schneiden die Abscissenachse in den Punkten T und N, welche mit den Brennpunkten vier harmonische Punkte bilden. Folglich sind BM, CM, NM, TM vier harmonische Strahlen, und da $MN \perp MT$, so halbiert MN den Winkel zwischen BM und CM.

Die Tangente ist die Halbierungslinie des Winkels CMF oder auch die des Scheitelwinkels BMG.

Trägt man auf der Verlängerung von BM die Strecke $MF = CM$ ab, und verbindet C mit F, so ist CMF ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die Tangente MT die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze ist. — Folglich steht MT senkrecht zu CF und halbiert letztere. — Der Punkt F wird der Gegenpunkt der Tangente in Bezug auf den Brennpunkt C genannt. — Ebenso heisst G der Gegenpunkt der Tangente in Bezug auf den Brennpunkt B, wenn G auf der Verlängerung von CM so liegt, dass $GM = BM$ ist. —

Jeder Punkt auf der Tangente ist von einem Brennpunkt und dem zugehörigen Gegenpunkt gleich weit entfernt.

Der Abstand eines Gegenpunktes vom nicht zugehörigen Brennpunkte ist $= 2a$.

Konstruktionsaufgaben.

20) Von einem Punkte P Tangenten an eine gegebene Ellipse zu ziehen.

Anm. Die Ellipse ist durch die grosse Achse und die beiden Brennpunkte gegeben.

21) An eine Ellipse Tangenten zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.

22) Drei Tangenten einer Ellipse, und ein Brennpunkt derselben sind gegeben. — Den andern Brennpunkt und die grosse Achse zu finden. —

23) Fällt man von den beiden Brennpunkten B und C (Fig. 23) Lote auf eine Tangente MT, so liegen die Fusspunkte H und J auf dem, um die grosse Achse als Durchmesser, gezeichneten Kreise. — (Dieser Kreis wird der Hauptkreis der Ellipse genannt.)

Beweis. In dem Dreieck BCF sind A und J die Mitten der Seiten BC und CF, folglich ist $AJ = \frac{1}{2} BF = a$. Ebenso ist in dem Dreieck BCG: $AH = \frac{1}{2} CG = a$.

Man konstruiere hiernach die Ellipse aus der grossen Achse und den Brennpunkten, indem man eine die Ellipse einhüllende Schar von Tangenten zeichnet.

24) Mit Hülfe des Satzes 23) die Aufgaben 20, 21 und 22 zu lösen.

25) An zwei Ellipsen, welche einen Brennpunkt gemeinsam haben, Tangenten zu ziehen welche beide zugleich berühren.

26) Der Ort der Gegenpunkte aller Tangenten in Bezug auf einen der beiden Brennpunkte ist ein Kreis vom Halbmesser $2a$, dessen Mittelpunkt der andere Brennpunkt ist.

27) Innerhalb eines Kreises K ist ein fester Punkt B gegeben. — Es soll bewiesen werden, dass der Ort eines Punktes M, welcher von B und dem Umfange des Kreises K gleiche Abstände hat, eine Ellipse ist.

28) Die grosse Achse und die beiden Brennpunkte einer Ellipse sind gegeben. Man soll die beiden Schnittpunkte einer gegebenen Geraden G mit der Ellipse durch Konstruktion finden.

Konjugierte Durchmesser.

29) Die Koordinaten der Mitte zwischen den Schnittpunkten der Geraden $y = mx + n$ und der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ zu finden.

Aufl. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind diejenigen Werte von x und y welche den beiden Gleichungen:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$
$$y = mx + n$$

zugleich genügen. Betrachtet man diese Gleichungen als Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y, so erhält man durch die Auflösung derselben die gesuchten Werte. — Da die eine Gleichung vom ersten, die andere vom zweiten Grade ist, so erhält man für jede Unbekannte im allgemeinen zwei Werte, d. h. es giebt zwei Durchschnittspunkte. — Durch die Substitution von y aus der zweiten Gleichung in die erste erhält man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$x^2 + \frac{2a^2mn}{a^2m^2 + b^2} \cdot x + \frac{a^2(n^2 - b^2)}{a^2m^2 + b^2} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Abscissen der gesuchten Durchschnittspunkte. — Bezeichnet man dieselben mit α und β, so folgt aus einer bekannten Eigenschaft der quadratischen Gleichungen:

$$\alpha + \beta = -\frac{2a^2mn}{a^2m^2 + b^2},$$

folglich: $$\frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2}.$$

Dies ist aber nach I, 5 die Abscisse der Mitte zwischen den beiden Schnittpunkten. Setzt man diesen Wert an die Stelle von x in der Gleichung der Geraden $y = mx + n$, so erhält man für die zugehörige Ordinate den Wert: $\frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2}$.

Bezeichnet man die Koordinaten der Sehnenmitte mit ξ und η, so hat man: $\xi = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2}$, $\eta = \frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2}$.

30) Den Ort der Mitten aller Sehnen zu finden, welche der Geraden $y = mx + n$ parallel sind.

Aufl. In den für ξ und η gefundenen Formeln ist m als Konstante, n dagegen als Veränderliche zu betrachten. — Die Gleichung des gesuchten Ortes ist nun eine Gleichung zwischen ξ und η, welche unabhängig von n sein muss. — Die Elimination von n ergiebt die Gleichung: $\eta = -\frac{b^2}{a^2m}\xi$,

welche eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade, also einen Durchmesser der Ellipse vorstellt. —

Jede Schar paralleler Sehnen wird von einem Durchmesser halbiert. —

31) Wenn ein Durchmesser D diejenigen Sehnen halbiert, welche einem andern Durchmesser D_1 parallel sind, so halbiert auch der Durchmesser D_1 alle zu D parallelen Sehnen. (Beweis leicht mit Hülfe der Gleichungen der Durchmesser zu führen.) — Zwei Durchmesser, welche diese Eigenschaft besitzen, heissen konjugierte Durchmesser. —

32) Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel dem konjugierten Durchmesser. —

33) Wie gross ist der Winkel φ, welchen der Durchmesser $y = mx$ mit seinem konjugierten Durchmesser bildet?

Antw. Man findet $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2 m^2 + b^2}{(a^2 - b^2) m}$ oder auch

$$\sin \varphi = \frac{a^2 m^2 + b^2}{\sqrt{(a^4 m^2 + b^4)(1 + m^2)}}.$$

34) Welchen Abstand hat ein Endpunkt des Durchmessers $y = mx$ von seinem konjugierten Durchmesser?

Antw. $$\frac{ab\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{a^4 m^2 + b^4}}.$$

35) Verbindet man die Endpunkte zweier konjugierten Durchmesser durch gerade Linien, so hat das von den letzteren gebildete, der Ellipse einbeschriebene Parallelogramm den konstanten Inhalt 2 ab.

36) Die vier Tangenten in den Endpunkten zweier konjugierten Durchmesser bilden ein der Ellipse umbeschriebenes Parallelogramm (Tangentenparallelogramm), welches den konstanten Inhalt 4 ab hat. —

37) Sind a_1 und b_1 zwei konjugierte Halbmesser, so ist immer:

$$a_1{}^2 + b_1{}^2 = a^2 + b^2.$$

38) Für zwei aufeinander senkrecht stehende Halbmesser k_1 und k_2 soll folgende Beziehung nachgewiesen werden:

$$\frac{1}{k_1{}^2} + \frac{1}{k_2{}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Folgende Aufgaben sollen durch Konstruktion gelöst werden:

39) Man soll den Mittelpunkt, die Achsen und die Brennpunkte einer gezeichnet gegebenen Ellipse finden.

40) Durch einen gegebenen Punkt M einer Ellipse eine Tangente an dieselbe zu legen.

Mit Hülfe von 32 zu lösen.

41) Den Berührungspunkt einer gegebenen Tangente zu bestimmen.

42) Es sollen vier Tangenten einer gegebenen Ellipse gezeichnet werden, welche ein Quadrat einschliessen.

43) Wie heissen die Gleichungen der beiden konjugierten Durchmesser einer Ellipse, welche symmetrisch zu den Hauptachsen liegen?

Antw. $$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Hiernach sind dieselben leicht zu konstruieren. —

---

44) Verbindet man einen Punkt der Ellipse mit den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers durch zwei Sehnen, so sind die Durchmesser, welche diesen Sehnen parallel sind, konjugierte Durchmesser.

45) In einer Ellipse sollen diejenigen konjugierten Durchmesser angegeben werden, welche einen gegebenen Winkel φ miteinander bilden. —

46) Eine beliebige Tangente schneidet auf den beiden Tangenten in den Endpunkten der grossen Achse zwei Segmente ab, deren Produkt gleich b^2 ist. — Ebenso werden auf den Tangenten in den Endpunkten der kleinen Achse von einer beliebigen dritten Tangente Segmente abgeschnitten, deren Produkt a^2 ist. —

Pol und Polare.

47) Die Gleichung derjenigen Geraden zu finden, welche die Berührungspunkte der vom Punkte $P(\alpha, \beta)$ an die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ gezogenen Tangenten verbindet. (Berührungssehne.)

Aufl. Sind x_1y_1 die Koordinaten des Berührungspunktes einer Tangente, so ist die Gleichung derselben: (s. 7, β)

$$a^2y_1y + b^2x_1x - a^2b^2 = 0;$$

und wenn die Tangente durch P gehen soll, so müssen α und β dieser Gleichung genügen. Hieraus folgt:

$$a^2y_1\beta + b^2x_1\alpha - a^2b^2 = 0.$$

Da nun diese Gleichung erfüllt werden muss, wenn man für x_1y_1 die Koordinaten des Berührungspunktes der einen oder der anderen Tangente setzt, so heisst die Gleichung der Berührungssehne:

$$a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 = 0.$$

48) Bewegt sich in der vorigen Aufgabe P auf einer Geraden G, so geht die Berührungssehne durch einen festen Punkt M. — Der letztere liegt auf dem Durchmesser der Ellipse, welcher dem zu G parallelen Durchmesser konjugiert ist. — (Der Beweis ist wie in III, 63

zu führen.) M heisst der Pol der Geraden G; die letztere wird die Polare von M genannt.

49) Welches sind die Koordinaten des Pols der Geraden

$$mx + ny + 1 = 0?$$

Antw. Man findet: $-ma^2$, $-nb^2$.

50) Wie heisst die Gleichung der Polare des Punktes $M(x_1 y_1)$?

Antw. $$b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2 = 0.$$

51) Wie heisst die Gleichung der Polare in Bezug auf den Brennpunkt (e, o) als Pol?

Antw. $$x = \frac{a^2}{e}.$$

Die letztere ist also eine zur Abscissenachse senkrechte Gerade, welche vom Mittelpunkt der Ellipse den Abstand $\frac{a^2}{e}$ hat. — Man nennt sie auch wohl „Leitlinie" oder Direktrix. — Eine zweite Leitlinie ist die Polare des andern Brennpunktes; dieselbe liegt im Abstand $-\frac{a^2}{e}$ vom Mittelpunkt. —

52) Die Berührungssehne zweier Tangenten, welche von einem Punkte M einer Leitlinie ausgehen, steht senkrecht zu der Geraden, welche M mit dem zugehörigen Brennpunkte verbindet.

53) Ist $M(x_1 y_1)$ (Fig. 24) ein Punkt der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, so ist der Abstand desselben vom Brennpunkte C:

$$CM = \frac{a^2 - ex_1}{a} \text{ (s. 19 d. Abschn.)}$$

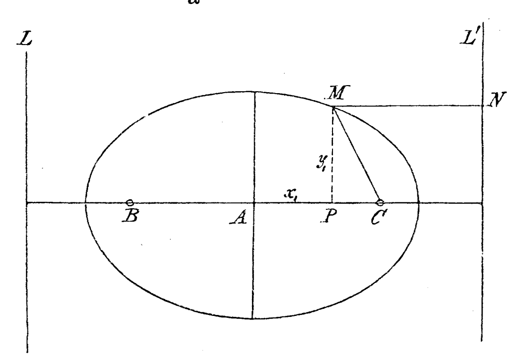


Fig. 24.

Ferner ist der Abstand desselben Punktes von der Leitlinie L:

$$MN = \frac{a^2}{e} - x_1 = \frac{a^2 - ex_1}{e}$$

woraus folgt: $$\frac{CM}{MN} = \frac{e}{a};$$

d. h. das Verhältnis der Abstände eines beliebigen Punktes der Ellipse von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitlinie ist konstant. — Man beweise hieraus noch den Satz: Das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten ist dem Verhältnis seiner Abstände von den zugehörigen Leitlinien gleich. —

54) Unter welchem Winkel erscheint die von einem Punkte $P(\alpha\beta)$ an die Ellipse gezogene Tangente von einem der Brennpunkte aus?

Anl. zur Aufl. — Man verbinde den Berührungspunkt $M(x_1 y_1)$ der Tangente und auch den Punkt P mit einem Brennpunkt B. Ist $BP = r$, $BM = r'$ so findet man für den Winkel $MBP = \varphi$ leicht:

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + e\alpha}{ar}.$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von den Koordinaten des Berührungspunktes, und hängt nur von der Lage des Punktes P ab. — Der Winkel ist deshalb für beide von P aus möglichen Tangenten derselbe. — Hieraus folgt der Satz: Die Gerade, welche den Schnittpunkt zweier Tangenten der Ellipse mit einem Brennpunkt B verbindet, halbiert den Winkel, welchen die beiden von B nach den Berührungspunkten gezogenen Geraden miteinander bilden. — (Man beweise hieraus auch 52).

55) Ist FG (Fig. 25) eine bewegliche Tangente, welche zwischen zwei festen Tangenten DM und EM einer Ellipse liegt, so erscheint dieselbe von einem Brennpunkte aus unter konstantem Winkel. — Verbindet man nämlich die drei Berührungspunkte D, H, und E und die Endpunkte F und G der beweglichen Tangente mit dem Brennpunkt B so ist nach 54):

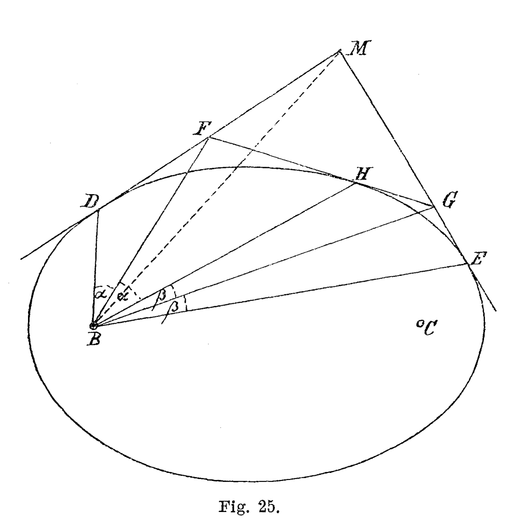


Fig. 25.

$\angle DBF = \angle FBH = \alpha;$

$\angle HBG = \angle GBE = \beta.$

Folglich $\angle FBG = \frac{1}{2} \angle DBE$. — Jede zwischen DM und EM liegende Tangente er-

scheint von B aus unter einem Winkel, welcher gleich der Hälfte des Winkels DBE ist. —

56) Eine bewegliche Tangente, welche von zwei auf der kleinen Achse der Ellipse zusammentreffenden Tangenten begrenzt wird, erscheint von beiden Brennpunkten aus unter gleichen Winkeln.

57) Verbindet man die Eckpunkte D, E, F, G eines beliebigen Tangentenvierecks mit einem Brennpunkte B, so ist die Summe derjenigen Winkel am Brennpunkt, welche auf gegenüberliegenden Seiten des Vierecks stehen, gleich zwei Rechten; also: $\angle DBE + \angle FBG = 2R$, ebenso $\angle EBF + \angle DBG = 2R$.

58) Jede von den beiden Tangenten in den Endpunkten der grossen Achse begrenzte Tangente erscheint von einem Brennpunkte aus unter rechtem Winkel.

Die Ellipse als Projektion des Kreises.

59) Die Mittelpunktsgleichung des Hauptkreises der Ellipse:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

heisst:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Wird in beide Gleichungen für x derselbe Wert x_1 eingesetzt, so erhält man für die zugehörige Ordinate y_1 der Ellipse:

$$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2};$$

und für die Ordinate y' des Kreises:

$$y' = \sqrt{a^2 - x_1^2}.$$

Folglich ist $y_1 = \frac{b}{a}y'$ oder $y_1 : y' = b : a$. — . . . . . . (1)

Denkt man sich den Hauptkreis um die grosse Achse der Ellipse so weit gedreht, bis die kleine Achse $AF_1 = b$ (Fig. 26) gleich der Projektion des zu DE senkrechten Halbmessers $AF = a$ wird, so ergiebt sich leicht, dass die Ellipse als Projektion des Hauptkreises betrachtet werden kann. — Denn, ist $GH_1 = y_1$ die Projektion der Ordinate $GH = y'$; α der Winkel, um welchen der Hauptkreis gedreht ist, so folgt:

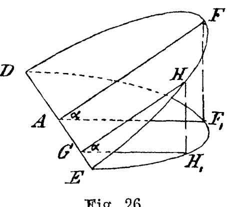


Fig. 26.

$$y_1 = y' \cos \alpha.$$

Aus Dreieck AFF_1 folgt: $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, also ist:

$$y_1 = \frac{b}{a} y',$$

wodurch die obige Behauptung erwiesen ist. —

Aus (1) folgen zwei Konstruktionen der Ellipse, wenn die beiden Achsen als gegeben angenommen werden. —

α) Um beide Achsen werden aus A (Fig. 27) Kreise gezeichnet. — Zieht man nun den beliebigen Halbmesser AH; ferner HG senkrecht zur grossen Achse DE, und durch den Punkt J, in welchem AH den kleineren Kreis trifft, eine Gerade parallel zu DE, so schneidet diese HG im Punkte H_1, welcher der Ellipse angehört. — Aus der angegebenen Konstruktion folgt nämlich leicht:

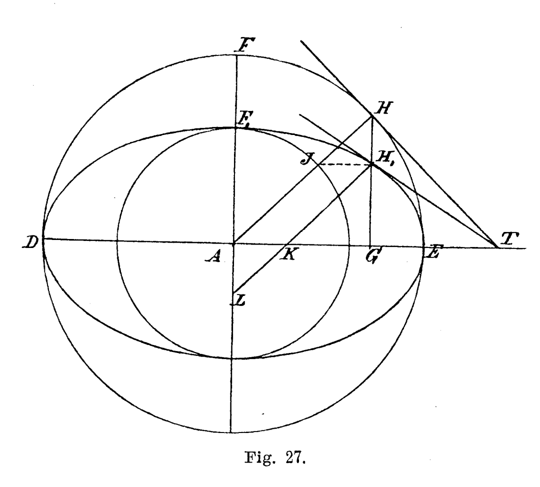


Fig. 27.

$$GH_1 : GH = AJ : AH.$$
$$= b : a.$$

β) Zieht man durch H_1 die Gerade H_1L parallel zu AH, so hat man: $LH_1 = AH = a$, und $H_1K = AJ = b$; also $LK = a - b$. — Lässt man deshalb die Gerade LH_1, welche die Länge a hat, sich so bewegen, dass die beiden Punkte L und K stets auf den beiden Achsen der Ellipse liegen, so beschreibt der Endpunkt H_1 die Ellipse. (Hierauf beruht der Ellipsenzirkel.)

Um in dem Punkte H_1 die Tangente an die Ellipse zu ziehen, zeichne man die Tangente HT des Kreises, welche denselben in H berührt. Zieht man H_1T, so ist dies die gesuchte Tangente der Ellipse. Warum?

Flächeninhalt der Ellipse.

60) Die Projektion einer ebenen Figur F ist bekanntlich gleich $F . \cos\alpha$, wenn α der Neigungswinkel von F gegen die Projektionsebene

ist. — Hieraus folgt für die Fläche f der Ellipse:

$$f = a^2\pi \cdot \cos\alpha;$$

und weil $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ ist:

$$f = ab\pi.$$

---

61) Zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse sind stets die Projektionen von zwei aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern des entsprechenden Kreises. —

62) Die Sätze 32, 35, 36 zu beweisen, indem man die Ellipse als Projektion eines Kreises betrachtet. — Ebenso die Aufgaben 39, 40 und 41 hiernach zu lösen. —

63) Wie gross ist der Inhalt des Abschnittes einer Ellipse, welcher von einer Sehne begrenzt wird, die durch die Mitte der halben grossen Achse AE geht, und senkrecht zu der letzteren steht?

Antw. $\frac{ab}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

64) Wie gross sind die beiden Abschnitte, in welche die Gerade $2x - 3y - 6 = 0$ die Ellipse $9y^2 + 4x^2 = 900$ teilt?

Antw. 193,3 und 277,94.

65) Die Gleichung einer Ellipse ist: $16y^2 + 9x^2 = 3600$. — Wie gross ist der Inhalt des Sektors, welcher von der halben grossen Achse AE und von einer durch den Anfangspunkt A gehenden Geraden begrenzt wird, wenn dieselbe mit AE einen Winkel von 45° bildet. —

Antw. 139,09.

66) Mit Hülfe von 59) die Richtigkeit folgender Konstruktionen der Ellipse nachzuweisen.

α) Gegeben sind die Hauptachsen DE und HJ (Fig. 28). — Man zeichnet die vier Tangenten in den Endpunkten der Hauptachsen. Dieselben bilden das Rechteck FGKL, dessen Seiten bez. den Achsen parallel sind. Nun teile man AE und GE in dieselbe Anzahl gleicher Teile. Zieht man gerade Linien von J durch die Teilpunkte $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ und von H nach $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$ so schneiden sich $J\gamma_1$ und $H\delta_1$ in ξ_1; $J\gamma_2$ und $H\delta_2$ in ξ_2 u. s. f. — Die Punkte $\xi_1 \xi_2 \ldots$ gehören der gesuchten Ellipse an.

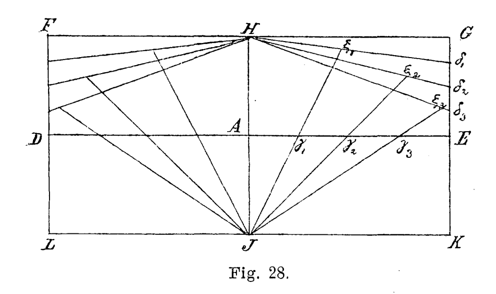


Fig. 28.

β) Sind zwei konjugierte Durchmesser DE und HJ (Fig. 29) der Ellipse gegeben, so ist die Konstruktion ganz dieselbe. —

Anl. z. Bew. Man zeige, dass die angegebenen Konstruktionen für den Kreis gültig sind, und wende hierauf den Satz 59) an.

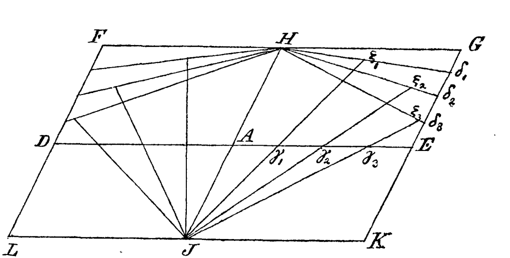


Fig. 29.

67) Die Ellipse kann aus zwei konjugierten Durchmessern DE und JH (Fig. 30) auch auf folgende Weise konstruiert werden.

Um einen der Durchmesser, z. B. DE, beschreibe man aus dem Mittelpunkte A desselben einen Kreis. — In A ziehe man AF ⊥ DE, und verbinde F mit H durch eine Gerade. — Errichtet man nun an beliebiger Stelle O des Durchmessers DE das Lot OL und zieht OP ∥ AH, ferner LP ∥ FH, so ist P ein Punkt der Ellipse.

Fig. 30.

Beweis leicht, wenn man 61) berücksichtigt.

Man beweise noch folgende Tangentenkonstruktion: Zieht man in L die Tangente LT an den Kreis, und verbindet den Punkt T, in welchem diese den Durchmesser DE trifft, mit P, so ist die Gerade PT die Tangente der Ellipse im Punkte P.

68) Bei der vorigen Konstruktion schneidet der Hülfskreis die Ellipse, ausser in D und E, noch in zwei anderen Punkten. Nun sind die Dreiecke LOP, AFH, und alle übrigen, welche zur Konstruktion der Ellipse verwendet werden, einander ähnlich. — Man bestimme die Lage des veränderlichen Dreiecks so, dass die zu FH parallele Seite desselben eine Sehne des Kreises wird. — Der eine Endpunkt der Sehne ist dann zugleich ein Punkt der Ellipse. — Zieht man aus diesem Punkte den Durchmesser, so erhält man noch den vierten Schnittpunkt des Kreises und der Ellipse. —

Man löse hiernach die Aufgabe: Aus zwei konjugierten Durchmessern einer Ellipse die Hauptachsen zu konstruieren. —

69) Einem gegebenen Dreieck eine Ellipse zu umschreiben, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt des Dreiecks ist. (Die Hauptachsen sind zu bestimmen.)

70) Jede schiefe Parallelprojektion eines Kreises ist eine Ellipse.

71) Die Projektion eines gegebenen Dreiecks soll ein gleichseitiges Dreieck sein. — Es ist der Neigungswinkel des gegebenen Dreiecks gegen die Projektionsebene durch Konstruktion zu bestimmen.

Andere Gleichungsformen der Ellipse.

72) Wie heisst die Scheitelgleichung der Ellipse?

Antw.
$$y = \sqrt{\frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2}$$
oder
$$y = \sqrt{-\frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2},$$
je nachdem der eine oder der andere Endpunkt der grossen Achse als Anfangspunkt genommen wird. —

Die allgemeine Form der Gleichung ist: $y = \sqrt{mx + nx^2}$, welche hiernach eine Ellipse bedeutet, wenn $n < 0$.

73) Man leite aus 67) die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ab für schiefwinklige Achsen, wenn die konjugierten Durchmesser DE und JH (Fig. 30) als Abscissen- und Ordinatenachse angenommen werden.

Antw. Man findet $y = \frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1{}^2 - x^2}$, wenn $a_1 = \frac{1}{2}$DE und $b_1 = \frac{1}{2}$JH.

74) Die Gleichung der Ellipse zu finden, wenn die grosse Achse durch den Anfangspunkt geht, und mit der Abscissenachse den Winkel α bildet. —

Anl. zur Aufl. Die Koordinaten der Brennpunkte B und C sind in diesem Falle: $e\cos\alpha$, $e\sin\alpha$ und $-e\cos\alpha$, $-e\sin\alpha$. — Ist nun M(xy) ein beliebiger Punkt der Ellipse, so setzt man die Summe der Entfernungen dieses Punktes von den beiden Brennpunkten gleich 2a. — Hieraus findet man leicht als Gleichung der Ellipse:
$$(a^2 - e^2\cos^2\alpha)x^2 + (a^2 - e^2\sin^2\alpha)y^2 + 2e^2xy\sin\alpha\cos\alpha = a^2b^2.$$
Die allgemeine Form dieser Mittelpunktsgleichung ist demnach:
$$Ax^2 + By^2 + Cxy = D.$$

75) Die Koordinaten der Brennpunkte seien $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\beta_1)$. — Man zeige, dass die Gleichung der Ellipse, bei dieser beliebigen Lage, die allgemeine Form: $Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ annimmt.

Linienkoordinaten.

76) Welches sind die Koordinaten der Tangente für den Punkt $M(x_1 y_1)$ der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$?

Antw. $$u = -\frac{x_1}{a^2}, \quad v = -\frac{y_1}{b^2}.$$

77) Wie heisst die Mittelpunktsgleichung der Ellipse in Linienkoordinaten?

Antw. $$a^2u^2 + b^2v^2 = 1.$$

78) Die Koordinaten des Berührungspunktes der Tangente $P(u_1 v_1)$ zu bestimmen.

Antw. $$x = -a^2u_1, \quad y = -b^2v_1.$$

79) Einem Rhombus, dessen halbe Diagonalen c und d sind, soll eine Ellipse einbeschrieben werden. — Die in d liegende halbe Achse a ist gegeben ($a < d$). Wie gross ist die andere Achse der Ellipse und wie heisst die Gleichung derselben?

Antw. Die zweite Achse der Ellipse ist: $b = \frac{c}{d}\sqrt{d^2 - a^2}$, und die Gleichung der Ellipse heisst:

$$a^2d^2u^2 + c^2(d^2 - a^2)v^2 = d^2.$$

80) Die Koordinaten der Geraden zu bestimmen, welche die Berührungspunkte der beiden Tangenten $T_1(u_1 v_1)$, $T_2(u_2 v_2)$ verbindet.

Antw. Man findet $$u = \frac{v_2 - v_1}{a^2(u_1v_2 - u_2v_1)},$$

$$v = \frac{u_1 - u_2}{b^2(u_1v_2 - u_2v_1)}.$$

81) Wie heisst die Scheitelgleichung der Ellipse?

Antw. $$b^2v^2 + 2au = 1.$$

82) Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse lässt sich schreiben:

$$b^2v^2 = 1 - a^2u^2 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

oder auch: $$b^2v^2 = (1 + au)(1 - au).$$

Ist n eine beliebige Zahl, so ist die Gleichung der Ellipse auch das Produkt der Gleichungen:

$$bv = n\,(1 + au)$$

$$bv = \frac{1}{n}(1 - au).$$

Den letzteren kann man die Form:

$$\left.\begin{aligned} au - \frac{b}{n}v + 1 = 0 \\ -au - nbv + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

geben. Diejenigen Werte von u und v, welche den Gleichungen (2) zugleich genügen, müssen auch die Gleichung (1) befriedigen. — Nun sind aber (2) die Gleichungen zweier Punkte, mit den Koordinaten $a, -\frac{b}{n}$, bez. $-a, -bn$; danach sind nun u und v die Koordinaten der Verbindungslinie der beiden Punkte, welche zugleich eine Tangente der Ellipse ist. — Durch Änderung der Zahl n lassen sich hiernach beliebig viele Punktepaare angeben, deren Verbindungslinien Tangenten der Ellipse sind. —

Man zeige die Richtigkeit folgender Konstruktion der Ellipse durch einhüllende Tangenten. — Es sei HJKL (Fig. 31) das Rechteck, welches von den Tangenten in den Endpunkten der Hauptachsen DE und FG gebildet wird. Projiciert man von D aus einen beliebigen Punkt M der kleinen Achse nach P auf HJ, und denselben Punkt von H aus nach Q auf JK, so ist PQ eine Tangente der Ellipse. —

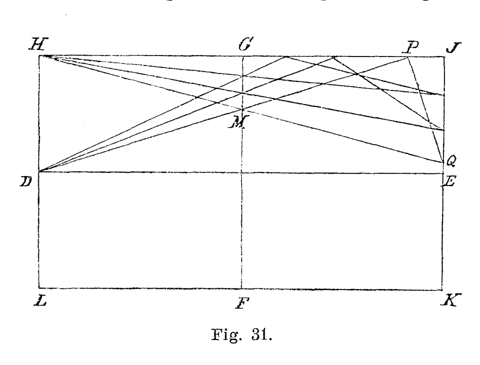


Fig. 31.

83) Ein rechter Winkel dreht sich um seinen Scheitel B. Die Schenkel des Winkels schneiden zwei feste Parallelen. — Welche Kurve wird von der Verbindungslinie der Schnittpunkte eingehüllt? (B liege zwischen den Parallelen im Abstande e von der Mitte derselben; der Abstand der beiden Parallelen voneinander sei 2 a.) —

Antw. Nimmt man die Gerade, welche durch B geht und senkrecht zu den gegebenen Parallelen steht, als Abscissenachse, und die Ordinatenachse in der Mitte zwischen den Parallelen an, so heisst die Gleichung der Kurve $a^2u^2 + (a^2 - e^2)v^2 = 1$; dieselbe ist demnach eine Ellipse. —

84) Der Scheitel eines rechten Winkels bewegt sich auf dem Umfang eines Kreises. Der eine Schenkel des Winkels geht stets durch einen innerhalb des Kreises liegenden festen Punkt. Welche Kurve umhüllt der andere Schenkel?

Antw. — Man erhält eine Ellipse, deren grosse Achse gleich dem Durchmesser des festen Kreises ist.

Polarkoordinaten.

85) Wie heisst die Polargleichung der Ellipse, wenn der Pol ein Brennpunkt ist, und der veränderliche Winkel φ von der Geraden aus gerechnet wird, welche den Brennpunkt mit dem nächsten Scheitel verbindet?

Antw. $r = \frac{b^2}{a + e \cdot \cos\varphi}$. Setzt man $\frac{b^2}{a} = p$ und $\frac{e}{a} = \xi$, so hat man auch als Polargleichung:

$$r = \frac{p}{1 + \xi \cdot \cos\varphi}; \quad 0 < \xi < 1.$$

86) Wie heisst die Polargleichung, wenn der Pol im Mittelpunkt liegt, und der veränderliche Winkel von der grossen Achse aus gerechnet wird?

Antw. $$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}$$

oder auch $$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - e^2 \cos^2\varphi}.$$

87) Nachzuweisen, dass das Rechteck aus den Abschnitten einer Sehne, welche durch einen Brennpunkt geht, dividiert durch die ganze Sehne den konstanten Quotient $\frac{b^2}{2a}$ giebt.

88) Durch einen Brennpunkt der Ellipse eine Sehne von gegebener Länge zu ziehen.

89) Die Gleichung des Ortes der Fusspunkte aller Lote zu finden, welche man von einem Brennpunkt auf die Tangenten der Ellipse fällen kann.

Vermischte Aufgaben.

90) Wie gross ist der Abstand der Normale des Punktes M vom Mittelpunkt der Ellipse?

Antw. $$\frac{e^2 x_1 y_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}}.$$

91) Die Länge der durch einen Brennpunkt gehenden Sehne zu finden, welche mit der grossen Achse den Winkel φ bildet.

Antw. $\frac{2b^2}{a} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\cos^2\varphi\right)}$ oder wenn man wieder $\frac{b^2}{a} = p$ und $\frac{e}{a} = \xi$ setzt: $\frac{2p}{1 - \xi^2 \cos^2\varphi}$.

92) Wie lang ist ein unter dem Winkel φ gegen die grosse Achse geneigter Durchmesser d der Ellipse?

Antw. $$d^2 = \frac{4\,a^2 b^2}{a^2 - e^2 \cos^2\varphi} = \frac{4\,b^2}{1 - \frac{e^2}{a^2}\cos^2\varphi}$$
$$= \frac{4\,b^2}{1 - \xi^2\cos^2\varphi}.$$

93) Jeder Durchmesser einer Ellipse ist die mittlere Proportionale zwischen der grossen Achse, und derjenigen Brennpunktssehne, welche dem Durchmesser parallel ist. —

94) Die Summe zweier, durch einen Brennpunkt gehenden Sehnen, welche zu zwei konjugierten Durchmessern parallel sind, ist konstant, und zwar $= \frac{a^2 + b^2}{2\,a}$.

95) Sind s_1 und s_2 zwei senkrecht zu einander stehende Brennpunktssehnen, so ist:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{a^2 + b^2}{2\,ab^2}.$$

96) Die Koordinaten des Endpunktes eines Durchmessers sind $x_1 y_1$. Man soll die Koordinaten des Endpunktes vom konjugierten Durchmesser bestimmen.

Antw. Man findet $x = \pm \frac{a}{b} y_1, \quad y = \mp \frac{b}{a} x_1$.

97) Der Abstand einer Tangente vom Mittelpunkt der Ellipse ist gleich $\frac{ab}{b_1}$, wenn b_1 die Hälfte des zur Tangente parallelen Durchmessers ist.

98) Der Winkel α, welchen zwei konjugierte Halbmesser a_1 und b_1 miteinander bilden, ist bestimmt durch:

$$\sin\alpha = \frac{ab}{a_1 b_1}.$$

99) Verbindet man zwei Punkte einer Ellipse mit den Brennpunkten, so schliessen die vier Geraden ein Viereck ein, welches einem Kreise umbeschrieben ist.

100) Zeichnet man durch irgend einen Punkt P der Ellipse einen Kreis, welcher zugleich durch die beiden Brennpunkte geht, so schneidet derselbe die Ordinatenachse in denjenigen Punkten, in welchen diese von der Tangente und Normale des Punktes P getroffen wird.

101) Der Ort der Schwerpunkte aller Dreiecke, deren Ecken die beiden Brennpunkte und ein Punkt der Ellipse sind, ist eine der ersten koncentrische und ähnliche Ellipse.

102) Zieht man vom Endpunkte D eines Durchmessers DE eine Sehne nach einem beliebigen Punkte M der Ellipse und vom Mittelpunkte eine Parallele zu derselben, so ist der Ort des Punktes, in welchem letztere die Tangente in M schneidet, die Tangente, welche den Kreis in E berührt. —

B. Die Parabel.

1) Die Parabel ist der geometrische Ort eines Punktes M, welcher von einer festen Geraden AB (Leitlinie oder Direktrix) und von einem festen Punkte F (Brennpunkt) gleiche Abstände hat. — Fig. 32.

Die Gerade, welche durch F geht und senkrecht zur Leitlinie steht, sei die Abscissenachse; die Mitte S zwischen Brennpunkt und Leitlinie der Anfangspunkt. — Bezeichnet man den Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie mit p (Parameter), so heisst die Gleichung der Parabel $y^2 = 2\,px$ oder

$$y = \pm \sqrt{2\,px}.$$

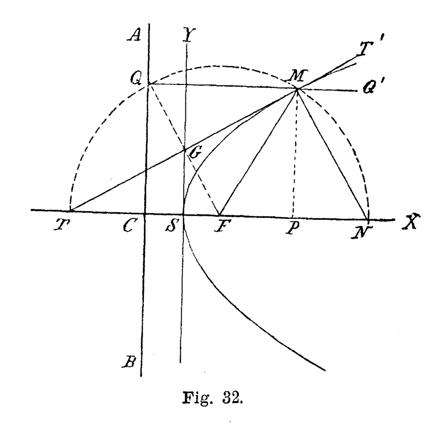


Fig. 32.

Aus dieser Gleichung folgt, dass zu jedem Wert von x zwei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Werte von y gehören. — Die Parabel wird demnach durch die Abscissenachse in zwei kongruente Teile geteilt. — Für $x = 0$ ist auch $y = 0$; die Parabel geht demnach durch den Anfangspunkt (Scheitel der Parabel). — Mit unendlich wachsendem x wird auch y unendlich gross. — Auf der negativen Seite der Abscissenachse ist die Kurve nicht vorhanden. —

Was bedeutet die Gleichung $y = \sqrt{-2\,px}$?

2) Die Parabel zu konstruieren, wenn die Leitlinie und der Brennpunkt gegeben sind. —

3) Zwei Punkte M und N einer Parabel und der Brennpunkt F sind gegeben. — Man soll die Leitlinie und die Achse der Parabel durch Konstruktion finden. —

Anm. Man kann zwei Parabeln konstruieren, welche durch M und N gehen, und denselben Brennpunkt F haben.

4) Gegeben sind Achse und Scheitel der Parabel und die Koordinaten $x_1 y_1$ eines Punktes derselben. — Wie heisst die Gleichung der Parabel?

Antw. $$y^2 = \frac{y_1^2}{x_1} \cdot x.$$

Man bestimme hiernach die Lage des Brennpunktes durch Konstruktion. —

5) Die Koordinaten der Punkte zu finden, in welchen die Gerade $4x + 3y - 40 = 0$ die Parabel $y^2 = 16x$ schneidet.

Antw. $(4, 8)$, $(25, -20)$.

6) Wie heisst die Gleichung der Tangente im Punkte $M(x_1 y_1)$ der Parabel?

Antw. $y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$ oder: $y y_1 - px - px_1 = 0$.

7) Die Durchschnittspunkte der Tangente, welche die Parabel im Punkte $M(x_1 y_1)$ berührt, mit den Achsen zu finden.

Antw. Die Abscissenachse wird im Abstand $-x_1$, die Ordinatenachse im Abstande $\frac{y_1}{2}$ vom Anfangspunkt geschnitten.

Hieraus folgt eine einfache Tangentenkonstruktion.

8) Wie heisst die Gleichung der Normale für den Punkt $M(x_1 y_1)$?

Antw. $$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

9) Die Längen der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale für den Punkt $M(x_1 y_1)$ der Parabel $y^2 = 2px$ zu finden.

Antw. $\sqrt{2x_1(2x_1 + p)}$; $\sqrt{p(2x_1 + p)}$; $2x_1$; p. —

10) Nach 7) ist in Fig. 32: $PS = TS$. — Ferner ist $CS = FS$, woraus folgt: $PS + CS = FS + TS$ oder: $CP = TF$. — Nun ist $CP = QM = MF$, folglich $MF = TF$; das Dreieck MFT ist demnach gleichschenklig. — Hieraus ergiebt sich noch:

$$\angle TMF = \angle MTF = \angle TMQ = \angle T'MQ'. —$$

Die Tangente in M kann hiernach konstruiert werden: 1) als Halbierungslinie des Winkels FMQ oder 2) als Sehne des Kreisbogens MT, welchen man aus F als Mittelpunkt mit dem Halbmesser FM beschreibt. — Wird noch $FN = FM$ gemacht, so ist die Verbindungslinie MN die Normale für den Punkt M.

Aus $TS = PS$ folgt, dass $TG = GM$. — Die Tangente MT wird demnach durch die Ordinatenachse (Scheiteltangente) halbiert. — Da G die Mitte der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks MFT ist, so

steht FG senkrecht zu MT und geht verlängert durch Q. — Ferner sieht man leicht, dass auch FG = GQ sein muss. — Q heisst der Gegenpunkt der Tangente MT in Bezug auf den Brennpunkt F.

Der Ort der Gegenpunkte aller Tangenten in Bezug auf den Brennpunkt F ist die Leitlinie der Parabel. —

11) Man löse hiernach Aufgabe 4) durch Konstruktion. —

12) Nach 10) lässt sich die Parabel leicht aus Tangenten konstruieren. Ist SX die Achse (Fig. 33), SY die Scheiteltangente, F der Brennpunkt, so ziehe man durch den letzteren die Gerade DF beliebig. — Durch den Schnittpunkt D von DF und SY ziehe man DE senkrecht zu DF, dann ist DE eine Tangente der gesuchten Parabel. Durch Wiederholung dieser Konstruktion lassen sich nun beliebig viele, die Parabel einhüllende Tangenten bestimmen.

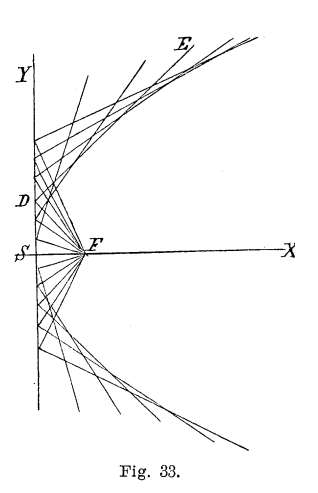


Fig. 33.

13) Der Brennpunkt, die Achse einer Parabel und eine Tangente derselben sind gegeben. — Man soll den Scheitel und die Leitlinie bestimmen.

14) Der Brennpunkt und zwei Tangenten einer Parabel sind gegeben. Man soll die Achse, den Scheitel und die Leitlinie finden.

15) Von einem gegebenen Punkte Tangenten an eine Parabel zu ziehen. — (Zwei Lösungen.)

16) An eine Parabel eine Tangente zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel ist. (Warum ist nur eine Tangente möglich?)

17) Zieht man von einem Punkte der Leitlinie zwei Tangenten an die Parabel, so stehen dieselben senkrecht aufeinander und die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte geht durch den Brennpunkt.

18) Die Gerade, welche den Schnittpunkt zweier Tangenten mit dem Brennpunkt F verbindet, halbiert den Winkel zwischen den von F nach den Berührungspunkten gehenden Geraden.

19) Sind MP und MQ zwei feste Tangenten, TT_1 eine dritte, bewegliche Tangente, so erscheint derjenige Abschnitt von TT_1 welcher zwischen MP und MQ liegt, vom Brennpunkt aus unter konstantem Winkel. —

20) Beschreibt man um das Dreieck, welches von drei beliebigen Tangenten einer Parabel gebildet wird, einen Kreis, so geht derselbe durch den Brennpunkt. —

21) Brennpunkt und Leitlinie einer Parabel sind gegeben. — Man soll die Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden mit der Parabel durch Konstruktion bestimmen.

22) Sind ML und MN (Fig. 34) zwei von einem Punkte der Achse MX ausgehende Tangenten (welche mit MX demnach gleiche Winkel bilden), und ist S der Scheitel, AB die Scheiteltangente, so ist die Verbindungslinie zweier Punkte H und J, welche auf den beiden ersten Tangenten ML und MN so liegen, dass GH = EJ ist, wiederum eine Tangente der Parabel. —

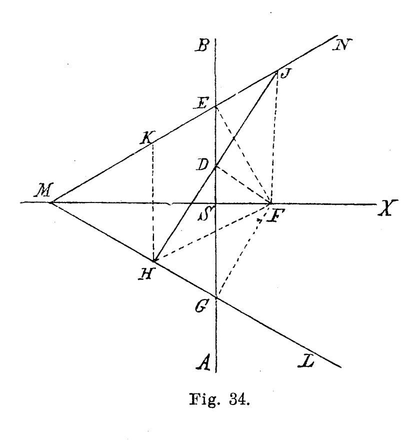


Fig. 34.

Beweis. Ziehe EF ⊥ MN, dann ist F der Brennpunkt. — Trifft nun HJ die Scheiteltangente in D, so ist zu zeigen, dass DF senkrecht zu HJ steht. — Man ziehe noch die Hülfslinien FG, FH und JF, ferner HK parallel zu AB, dann ergiebt sich leicht, dass △ EFJ ≅ △ FGH, folglich FJ = FH. — Ferner ist in dem gleichschenkligen Dreieck EGM: KE = GH = EJ, folglich auch DH = DJ. — Also ist D die Mitte der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks FHJ; folglich DF ⊥ HJ. Hiernach ergiebt sich eine sehr praktische Konstruktion der Parabel aus Tangenten, welche in der graphischen Statik vielfache Anwendung findet. Fig. 35.

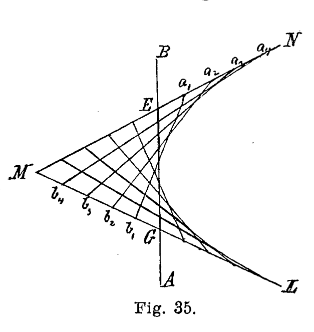


Fig. 35.

Man trage von E aus auf MN, und von G aus auf ML zu beiden Seiten eine beliebige Anzahl gleicher Teile ab, und verbinde die Teilpunkte a_1, a_2, a_3 . . . . mit b_1, b_2, b_3 . . . . wie in Fig. 35 angegeben. — Die Verbindungslinien sind dann sämtlich Tangenten, welche die Parabel einhüllen. —

23) Wie gross ist der Abstand der Tangente im Punkte $M(x_1 y_1)$ der Parabel vom Brennpunkte F?

Antw. $\frac{1}{2}\sqrt{p(2x_1 + p)}$.

24) Bestimme ebenso den Abstand der Normale im Punkte $M(x_1 y_1)$ vom Brennpunkt.

Antw. $\frac{1}{2}\sqrt{2\,x_1(2\,x_1 + p)}$.

25) Die Koordinaten der beiden Punkte sollen bestimmt werden, in welchen die von dem Punkte $M(\alpha\beta)$ an die Parabel $y^2 = 2\,px$ gezogenen Tangenten die letztere berühren.

Antw. $\frac{\beta^2 - p\alpha \pm \beta\sqrt{\beta^2 - 2\,p\alpha}}{p}$, $\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 2\,p\alpha}$.

26) Zieht man vom Schnittpunkt zweier Tangenten eine Parallele zur Achse der Parabel, so halbiert dieselbe die Berührungssehne der beiden Tangenten.

27) Wie heisst die Gleichung der Geraden, welche durch die Berührungspunkte der vom Punkte $M(\alpha\beta)$ an die Parabel gezogenen Tangenten geht?

Antw. $\beta y - px - p\alpha = 0$.

28) Bewegt sich in der vorigen Aufgabe M auf der Geraden $mx + ny + 1 = 0$, so dreht sich die Berührungssehne um den festen Punkt $P\left(\frac{1}{m}, -\frac{np}{m}\right)$ (P heisst der Pol jener Geraden).

Man beweise hiernach auch den Satz 17.

29) Die Koordinaten des Durchschnittes der Geraden $y = mx + n$ mit der Parabel $y^2 = 2\,px$ ergeben sich, wenn man die beiden Gleichungen nach x und y auflöst. — Durch Elimination von x erhält man für y die quadratische Gleichung:

$$y^2 - \frac{2\,p}{m}\,y + \frac{2\,np}{m} = 0.$$

Werden die Wurzeln dieser Gleichung, d. h. die Ordinaten der Schnittpunkte mit α und β bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$\alpha + \beta = \frac{2\,p}{m} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{p}{m};$$

d. h. die Ordinate der Mitte zwischen den beiden Schnittpunkten ist nur von m, aber nicht von n, abhängig. — Hieraus folgt:

Die Mitten paralleler Sehnen der Parabel haben gleiche Ordinaten; sie liegen also auf einer Geraden, welche parallel zur Achse der Parabel ist. — Jede solche Gerade wird ein Durchmesser der Parabel genannt. — Die Parabel hat hiernach unzählig viele Durchmesser, welche aber sämtlich parallel zur Achse derselben sind. —

30) Die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers ist parallel zu denjenigen Sehnen, welche der Durchmesser halbiert. —

31) Eine Parabel ist gezeichnet gegeben. — Man soll die Achse, den Brennpunkt und die Leitlinie derselben durch Konstruktion bestimmen.

32) Ist MN (Fig. 36) ein beliebiger Durchmesser, MR die Tangente in M und PS die Tangente in einem anderen Punkte S der Parabel, so ist PR = RS; ferner ist auch PM = QM, wenn QS parallel zu MR ist. —

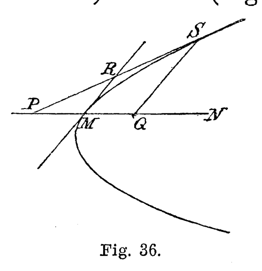


Fig. 36.

33) Von einem gegebenen Punkte Tangenten an eine gezeichnete Parabel zu ziehen, ohne den Brennpunkt und die Achse der Parabel zu benutzen. —

34) Die Gerade AB (Fig. 37) sei eine beliebige Sehne der Parabel AHCNB. Ist DE die zu AB parallele Tangente, C ihr Berührungspunkt, so ist ABC das an Inhalt grösste Dreieck, welches auf der Grundlinie AB steht und dem von AB abgeschnittenen Parabelsegment einbeschrieben werden kann. — Man halbiere AB in F, AC in M und ziehe durch diese Punkte die Durchmesser CF und GH, ferner in H die zu AC parallele Tangente HJ; endlich noch HK und ML parallel zu CD, dann ist: (s. 32)

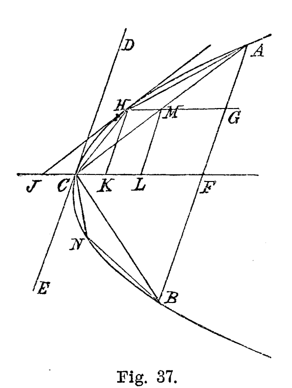


Fig. 37.

$$CK = CJ = HM = KL;$$

folglich: $\triangle CHM = \frac{1}{2} \triangle CML.$

Weil der Durchmesser GH die Sehne AC in M halbiert, so ist auch:

$$\triangle AHM = \triangle CHM;$$

folglich: $\triangle AHC = \triangle CML = \frac{1}{4} \triangle ACF.$

Nun ist $\triangle AHC$ das grösste dem von AC abgeschnittenen Segment einbeschriebene Dreieck; ebenso lässt sich zeigen, dass wenn BCN dass grösste Dreieck in dem Segment BNC ist, auch: $\triangle BCN = \frac{1}{4} \triangle BCF$ sein wird. — Folglich ist dann auch:

$$\triangle ACH + \triangle BCN = \frac{1}{4} \triangle ABC.$$

Ebenso beweist man, dass die Summe der grössten Dreiecke, welche den vier übrig gebliebenen, von AH, CH, CN und BN abgeschnittenen Segmenten einbeschrieben werden können, gleich

$$\frac{1}{4} \triangle ACH + \frac{1}{4} \triangle BCN = \frac{1}{16} \triangle ABC \quad \text{ist, u. s. f.}$$

Bezeichnet man nun den Inhalt des Dreiecks ABC mit F, so hat man für die Summe der unzählig vielen grössten Dreiecke, welche auf die eben angegebene Weise dem Parabelabschnitt einbeschrieben werden

können, die Formel:

$$S = F + \tfrac{1}{4} F + \tfrac{1}{16} F + \cdot \tfrac{1}{64} F \cdot + \cdots\cdots$$

oder $$S = \tfrac{4}{3} F.$$

Dies ist aber zugleich der Inhalt des von AB abgeschnittenen Parabelsegments. —

Steht die Sehne AB (Fig. 38) senkrecht zur Achse SX der Parabel, so ergiebt sich für die Fläche des Segments AFS leicht die Formel:

$$F = \tfrac{2}{3} a h,$$

wenn a und h die Koordinaten des Punktes A sind. —

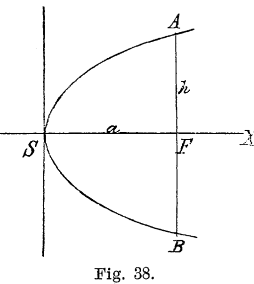


Fig. 38.

35) Wie gross ist der von zwei, zu den Abscissen 9 und 36 gehörigen Ordinaten begrenzte, oberhalb der Abscissenachse liegende Abschnitt der Parabel $y^2 = 25 x$?

Antw. 630.

36) Wie gross ist der Inhalt des Segments, welches die Gerade $y = \frac{1}{2} x + 6$ von der Parabel $y^2 = 16 x$ abschneidet?

Antw. $42\frac{2}{3}$.

37) Den vom Scheitel anfangenden Sektor einer Parabel $y^2 = 2 px$ zu berechnen, welcher von der Abscissenachse und einer durch den Brennpunkt gehenden unter 45° gegen die erstere geneigten Geraden begrenzt wird.

Antw. Man findet für die Fläche: $\frac{p^2}{6}(5 + 4\sqrt{2})$.

38) Aus dem Brennpunkt der Parabel $y^2 = 2 px$ wird mit dem Halbmesser r ein Kreis gezeichnet. Wie gross ist die von der gemeinschaftlichen Sehne abgeschnittene Fläche der Parabel?

Antw. $\frac{2}{3}(2 r - p)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{p}$.

39) Die Parabel $y^2 = 2 px$ wird von einem Kreise geschnitten, welcher durch den Scheitel der Parabel geht und dessen Mittelpunkt auf der Abscissenachse liegt. — Wie gross ist das von der gemeinschaftlichen Sehne abgeschnittene Parabelsegment, wenn der Halbmesser des Kreises r ist?

Antw. $\frac{16}{3}(r - p)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{p}$.

40) Welches sind die Koordinaten des Berührungspunktes der zu der Geraden $y = mx + n$ parallelen Tangente der Parabel?

Antw. $\frac{p}{2 m^2}$, $\frac{p}{m}$.

41) Auf der Parabel $y^2 = 2px$ sind zwei Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$ gegeben. Den Inhalt des grössten Dreiecks zu finden, welches dem von $M_1 M_2$ abgeschnittenen Parabelsegment einbeschrieben ist.

Antw. $$\frac{(y_2 - y_1)^3}{16\,p}.$$

42) Zieht man durch 3 Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$, $M_3(x_3 y_3)$, welche auf der Parabel $y^2 = 2px$ liegen, Tangenten an dieselbe, so ist das von den Tangenten gebildete Dreieck die Hälfte des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$.

Beweis. Die Gleichungen der Tangenten in den Punkten M_1, M_2, M_3 sind:

$$\begin{aligned} y y_1 - px - px_1 &= 0 \\ y y_2 - px - px_2 &= 0 \\ y y_3 - px - px_3 &= 0. \end{aligned}$$

Nach II, 78 ist der Inhalt des Dreiecks, welches von diesen Tangenten eingeschlossen wird:

$$f = \frac{\begin{vmatrix} y_1, & -p, & -px_1 \\ y_2, & -p, & -px_2 \\ y_3, & -p, & -px_3 \end{vmatrix}^2}{2\begin{vmatrix} y_1, & -p \\ y_2, & -p \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_1, & -p \\ y_3, & -p \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_2, & -p \\ y_3, & -p \end{vmatrix}} = \frac{p\begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \end{vmatrix}^2}{2\begin{vmatrix} y_1 1 \\ y_2 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_1 1 \\ y_3 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_2 1 \\ y_3 1 \end{vmatrix}}.$$

Ferner ist der Inhalt des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$:

$$F = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \end{vmatrix},$$

woraus folgt:

$$\frac{f}{F} = \frac{p\begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 1 \\ y_2 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_1 1 \\ y_3 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_2 1 \\ y_3 1 \end{vmatrix}}.$$

Drückt man hierin die Abscissen x_1, x_2, x_3 durch die Ordinaten aus, so erhält man:

$$\frac{f}{F} = \frac{\begin{vmatrix} y_1^2, & y_1, & 1 \\ y_2^2, & y_2, & 1 \\ y_3^2, & y_3, & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} y_1 1 \\ y_2 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_1 1 \\ y_3 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_2 1 \\ y_3 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1^2 - y_2^2, & y_1 - y_2, & 0 \\ y_2^2 - y_3^2, & y_2 - y_3, & 0 \\ y_3^2 \quad , & y_3 \quad , & 1 \end{vmatrix}}{2(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch $(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)$ so folgt:

$$\frac{f}{F} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 + y_2, & 1, & 0 \\ y_2 + y_3, & 1, & 0 \\ y_3^2 & , y_3, & 1 \end{vmatrix}}{2(y_1 - y_3)} = \tfrac{1}{2}.$$

---

43) Der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher durch einen festen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt, ist eine Parabel.

44) Der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt, ist eine Parabel.

45) Aus der Gleichung der Parabel: $y^2 = 2px$ kann man die beiden Gleichungen $y = x$ und $y = 2p$ bilden; multipliciert man die letzteren miteinander, so erhält man wieder die Gleichung der Parabel. — Dasselbe ist auch noch der Fall mit den beiden Gleichungen:

$$y = nx$$
$$y = \frac{2p}{n},$$

worin n eine willkürliche Zahl bedeutet. Folglich ist der Schnittpunkt der beiden durch diese Gleichungen dargestellten Geraden ein Punkt der Parabel. Durch Veränderung des Wertes von n lassen sich beliebig viele Paare von Geraden bestimmen, deren Schnittpunkte auf der Parabel liegen. Man soll hieraus eine Konstruktion der Parabel herleiten.

46) Wie heisst die Polargleichung der Parabel, wenn der Pol im Brennpunkt liegt, und der feste Schenkel des veränderlichen Winkels mit der Geraden vom Brennpunkt nach dem Scheitel zusammenfällt. —

Antw. $$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}.$$

47) Die Entfernungen zweier Punkte M_1 und M_2 einer Parabel vom Brennpunkte F seien r_1 und r_2. — Der Winkel M_1FM_2 ist gleich α. Welchen Winkel φ bildet r_1 mit der Achse; und wie gross ist p?

Antw. $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{r_2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}; \quad p = r_1(1 + \cos\varphi).$$

48) Nachzuweisen, dass alle Parabeln ähnliche Figuren sind.

49) Das Rechteck aus einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne und $\frac{p}{2}$, ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Sehne.

50) Durch den Brennpunkt einer gegebenen Parabel eine Sehne von gegebener Länge zu ziehen.

51) Wie heisst die Scheitelgleichung der Parabel in Linienkoordinaten? Antw. $pv^2 = 2u$.

52) Durch den auf der Abscissenachse im Abstand c vom Anfangspunkte liegenden Punkt P geht der eine Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel sich auf der Ordinatenachse bewegt. — Wie heisst die Gleichung der Kurve, welche der andere Schenkel einhüllt?

Antw. $cv^2 = u$.

Die Kurve ist demnach eine Parabel, in welcher $p = 2c$ ist.

Vermischte Aufgaben.

53) Die Abscisse des Durchschnittes zweier Tangenten ist das geometrische Mittel aus den Abscissen, und die Ordinate das arithmetische Mittel aus den Ordinaten der Berührungspunkte.

54) Das aus drei Tangenten einer Parabel gebildete Dreieck, und dasjenige, dessen Ecken die drei Berührungspunkte sind, haben gleiche Schwerpunktsordinaten.

55) Die von zwei Tangenten einer Parabel und dem dazwischen liegenden Parabelbogen begrenzte Fläche ist halb so gross wie der von der Berührungssehne begrenzte Parabelabschnitt.

Mit Hülfe dieses Satzes ist 42) leicht zu beweisen.

56) Zieht man im Brennpunkt einer Parabel die Ordinate und im Endpunkt derselben die Tangente, dann ist die Entfernung eines beliebigen Punktes P der Parabel vom Brennpunkt gleich der in P errichteten und bis an jene Tangente verlängerten Ordinate.

57) Die drei Höhen eines Tangentendreiecks der Parabel schneiden sich in einem Punkte der Leitlinie.

58) Zieht man vom Brennpunkt einer Parabel eine Gerade nach dem Schnittpunkte zweier Tangenten, so bildet diese mit der einen Tangente einen ebenso grossen Winkel, wie die andere Tangente mit dem durch den Schnittpunkt gezogenen Durchmesser der Parabel.

59) Den Winkel φ zu finden, welchen die beiden vom Punkte $M(\alpha\beta)$ an die Parabel $y^2 = 2px$ gezogenen Tangenten miteinander bilden. Antw. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}}{2\alpha + p}$.



60) Den Ort des Schwerpunktes desjenigen Dreiecks, dessen Ecken der Brennpunkt, ein beliebiger Punkt M der Parabel $y^2 = 2\,px$, und der Fusspunkt des von M auf die Leitlinie gefällten Lotes sind, zu bestimmen.

Antw. Man findet als Ort die Parabel $y^2 = \frac{8}{3}\,px$.

C. Die Hyperbel.

1) Die Hyperbel ist der geometrische Ort eines Punktes M, für welchen die Differenz seiner Entfernungen von zwei festen Punkten B und C konstant ist.

Ist $BC = 2e$ (Fig. 39), $BM - CM = 2a$, ferner die durch B und C gehende Gerade die Abscissenachse, die Mitte A zwischen B und C der Anfangspunkt, so findet man als Gleichung der Hyperbel:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

wenn $e^2 - a^2 = b^2$ gesetzt wird.

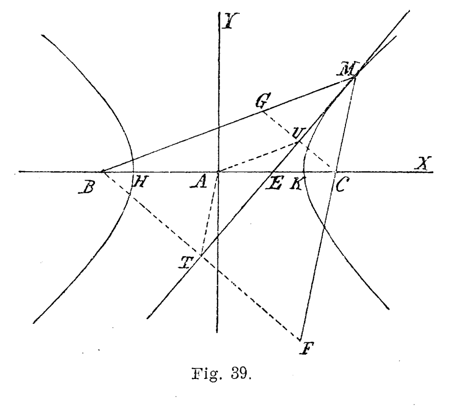


Fig. 39.

Die Gleichung der Hyperbel wird auch häufig so geschrieben:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1;$$

oder auf y reduciert:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Man zeichne nach der oben gegebenen Erklärung die Hyperbel durch Bestimmung einer hinreichenden Anzahl ihrer Punkte. —

Die beiden festen Punkte B und C heissen die Brennpunkte der Hyperbel. —

2) Wo schneidet die Hyperbel die Koordinatenachsen?

Antw. Die Abscissenachse wird in den Abständen $+a$ und $-a$ vom Anfangspunkt geschnitten. — Die Ordinatenachse wird von der Hyperbel nicht getroffen. Die Strecke $HK = 2a$ heisst die Hauptachse der Hyperbel, H und K sind die Scheitel derselben.

3) Es soll gezeigt werden, dass der Koordinatenanfang A der Mittelpunkt der Hyperbel ist, d. h. dass jede durch denselben gehende Gerade, welche an der Hyperbel endet, in A halbiert wird. (Durchmesser.)

Man zeige auch, dass die Hyperbel vier unendliche Zweige hat.

4) Zu beweisen, dass die Hauptachse der kürzeste von allen Durchmessern der Hyperbel ist. (Vergl. IV, A 4.)

5) Wie heisst die Gleichung der Tangente im Punkte $M(x_1y_1)$ der Hyperbel?

Antw. $$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$

oder $$a^2y_1y - b^2x_1x + a^2b^2 = 0.$$

6) Wo schneidet die Tangente im Punkte $M(x_1y_1)$ die Achsen?

Antw. Die Abscissenachse wird im Abstand $\frac{a^2}{x_1}$, die Ordinatenachse im Abstand $-\frac{b^2}{y_1}$ vom Anfangspunkt getroffen. (Hieraus ergeben sich Tangentenkonstruktionen.)

7) Wie heisst die Gleichung der Normale im Punkte $M(x_1y_1)$?

Antw. $$y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1).$$

8) Wo schneidet die Normale die Abscissenachse?

Antw. Im Abstand $\frac{e^2x_1}{a^2}$ vom Anfangspunkt.

9) Es soll bewiesen werden, dass die Tangente MT im Punkte $M(x_1y_1)$ den Winkel halbiert, welchen die von M nach den Brennpunkten gehenden Strahlen miteinander bilden.

Anl. z. B. Man zeige (Fig. 39), dass $BE : CE = BM : CM$. (s. IV. A, 19.)

10) Es sei MT (Fig. 39) die Tangente im Punkte M. Zieht man von den beiden Brennpunkten B und C die Geraden BM und CM, so ist $\angle BMT = \angle CMT$. Man mache $GM = CM$ und ziehe CG, dann ist $\triangle CGM$ gleichschenklig, und TM steht als Halbierungslinie des Winkels an der Spitze senkrecht zur Grundlinie CG und halbiert dieselbe. — Der Punkt G heisst deshalb der Gegenpunkt der Tangente in Bezug auf den Brennpunkt C. Verlängert man CM bis F so, dass $MF = BM$ wird, so ist auch $\triangle BMF$ gleichschenklig, und $BT = TF$; F ist deshalb der Gegenpunkt der Tangente TM in Bezug auf den Brennpunkt B. — Ferner ist $CF = BG = BM - CM = 2a$; d. h. die Entfernung eines Gegenpunktes vom nicht zugehörigen Brennpunkte ist gleich der Hauptachse des Hyperbel.

Jeder Punkt einer Tangente hat gleiche Abstände vom Gegenpunkt derselben und dem zugehörigen Brennpunkte. —

11) Fällt man von den beiden Brennpunkten B und C Lote auf eine Tangente MT (Fig. 39) der Hyperbel, so liegen die Fusspunkte T und U auf dem um die Hauptachse, als Durchmesser, beschriebenen Kreise.

Beweis. Man ziehe vom Mittelpunkt A die Geraden AU und AT, so ist in $\triangle$ BCG : $AB = AC$, $CU = UG$; folglich $AU = \frac{1}{2} BG = a$ u. s. f.

(Hieraus folgt eine Konstruktion der Hyperbel mittels einhüllender Tangenten.)

12) Von einem Punkte ausserhalb, Tangenten an eine gezeichnete Hyperbel zu ziehen.

13) Ebenso an eine Hyperbel Tangenten zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.

14) Drei Tangenten einer Hyperbel und ein Brennpunkt sind gegeben; man soll den andern Brennpunkt und die Hauptachse durch Konstruktion finden.

15) Nach 6) hat der Schnittpunkt der Tangente im Punkte $M_1(x_1 y_1)$ vom Mittelpunkt A den Abstand $\frac{a^2}{x_1}$. — Alle Tangenten des Zweiges auf der positiven Seite der Abscissenachse schneiden rechts vom Anfangspunkt, und alle Tangenten des anderen Zweiges links vom Anfangspunkt die Abscissenachse. — Je grösser x_1 (und folglich auch y_1) wird, desto mehr nähert sich der Schnittpunkt dem Anfangspunkt; er fällt mit diesem zusammen, wenn $x_1 = \infty$ ist. — Es giebt demnach zwei durch den Mittelpunkt gehende Tangenten, welche die Hyperbel im Unendlichen berühren. — Man nennt sie die Asymptoten der Hyperbel. —

Es sollen die Gleichungen der Asymptoten gefunden werden.

Antw. Man erhält: $y = \frac{b}{a} x$ und $y = -\frac{b}{a} x$ oder auch:

$$bx - ay = 0, \quad bx + ay = 0.$$

Hieraus folgt eine Konstruktion der beiden Asymptoten. —

16) Die Differenz der Quadrate zwischen einer Ordinate der Asymptote und einer Ordinate der Hyperbel, welche dieselbe Abscisse haben, ist gleich b^2. —

17) Das Produkt der von den Brennpunkten auf eine beliebige Tangente gefällten Lote ist gleich b^2.

18) Wie gross sind für den Punkt $M(x_1 y_1)$ der Hyperbel die Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale?

Antw. $\frac{\sqrt{(x_1^2 - a^2)(e^2x_1^2 - a^4)}}{ax_1}$; $\frac{b}{a^2}\sqrt{e^2x_1^2 - a^4}$;

$$\frac{x_1^2 - a^2}{x_1}; \quad \frac{b^2x_1}{a^2}.$$

19) Das Produkt aus der Normale im Punkte M und dem Abstand der in M berührenden Tangente vom Anfangspunkt ist gleich b^2.

20) Die Tangente in einem beliebigen Punkte $M(x_1y_1)$ der Hyperbel bildet mit den beiden Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalt.

Beweis. Die Gleichungen der Tangente und der Asymptoten sind:

$$\begin{aligned} a^2y_1y - b^2x_1x + a^2b^2 &= 0 \\ ay \quad + bx \qquad &= 0 \\ ay \quad - bx \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich (nach II, 78) für die Fläche des von diesen Geraden eingeschlossenen Dreiecks:

$$F = \frac{\begin{vmatrix} a^2y_1, & -b^2x_1, & a^2b^2 \\ a\;, & +b\;, & 0 \\ a\;, & -b\;, & 0 \end{vmatrix}^2}{2\begin{vmatrix} a^2y_1, & -b^2x_1 \\ a\;, & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^2y_1, & -b^2x_1 \\ a\;, & -b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a, & +b \\ a, & -b \end{vmatrix}} = \frac{4a^6b^6}{4a^5b^5} = ab.$$

21) Die Koordinaten der Mitte zwischen den Schnittpunkten der Geraden $y = mx + n$ und der Hyperbel sollen bestimmt werden.

Antw. Man findet: $x = \frac{a^2mn}{b^2 - a^2m^2}$; $y = \frac{b^2n}{b^2 - a^2m^2}$

(s. die Ableitung in IV. A, 29).

22) Der Ort der Mitten aller Sehnen, welche parallel zu der Geraden $y = mx + n$ sind, ist die durch den Anfangspunkt gehende Gerade $y = \frac{b^2}{a^2m}x$. —

23) Wenn ein Durchmesser D diejenigen Sehnen halbiert, welche einem anderen Durchmesser D_1 parallel sind, so halbiert auch D_1 alle zu D parallelen Sehnen. (Konjugierte Durchmesser.)

24) Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel zum konjugierten Durchmesser.

25) Eine Hyperbel ist gezeichnet gegeben. — Man soll den Mittelpunkt, die Achse, und die Brennpunkte bestimmen.

26) Schneidet eine Gerade die Hyperbel in den Punkten P und Q, und die beiden Asymptoten in R und S, so ist $PR = QS$ oder auch $PS = QR$.

27) Die Gleichung der Geraden zu finden, welche die Berührungspunkte der vom Punkte $M(\alpha\beta)$ an die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ gezogenen Tangenten verbindet.

Antw. Man findet auf dieselbe Weise wie in (IV. A, 47) als Gleichung der Berührungssehne:

$$a^2\beta y - b^2\alpha x + a^2b^2 = 0.$$

28) Bewegt sich der Punkt $M(\alpha\beta)$ in voriger Aufgabe auf der Geraden $mx + ny + 1 = 0$, so geht die Berührungssehne durch einen festen Punkt, dessen Koordinaten sind: $x = - a^2m$, $y = b^2n$. (Pol und Polare.)

29) Wie heisst die Gleichung der Polare in Bezug auf den Brennpunkt (e, 0) als Pol?

Antw. $$x = \frac{a^2}{e}.$$

Diese Gerade steht senkrecht zur Abscissenachse; sie wird „Leitlinie" genannt. — Eine zweite Leitlinie ist die Polare des anderen Brennpunktes; dieselbe hat den Abstand $-\frac{a^2}{e}$ vom Mittelpunkt der Hyperbel. —

30) Zieht man von einem beliebigen Punkte M, welcher auf der Leitlinie L liegt, Tangenten an eine Hyperbel, so steht die Gerade, welche M mit dem zugehörigen Brennpunkte verbindet, senkrecht zur Berührungssehne der beiden Tangenten. —

31) Der Abstand des Punktes $M(x_1y_1)$ der Hyperbel vom Brenn-C (e, 0) ist

$$CM = \sqrt{(x_1 - e)^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 - 2ex_1 + e^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)x_1^2}{a^2} - 2ex_1 + e^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{\frac{e^2x_1^2}{a^2} - 2ex_1 + a^2} = \frac{ex_1}{a} - a;$$

ferner ist der Abstand des Punktes M von der zugehörigen Leitlinie: $x_1 - \frac{a^2}{e} = \frac{ex_1 - a^2}{e}$.

Dividiert man beide Abstände durch einander, so erhält man den konstanten Quotient: $\frac{e}{a}$. — Das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Hyperbel von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitlinie ist konstant.

32) Unter welchem Winkel α erscheint die Tangente vom Punkte $M(x_1 y_1)$ bis zum Berührungspunkte P von einem Brennpunkte aus?

Antw. $$\cos\alpha = \frac{e x_1 - a^2}{a r}$$

wenn r die Entfernung des Punktes M vom Brennpunkte ist.

Da der Ausdruck für $\cos\alpha$ nur von den Koordinaten des Punktes M, aber nicht von denen des Berührungspunktes der Tangente abhängig ist, so gilt der gefundene Ausdruck für beide von M aus möglichen Tangenten. Hieraus folgt der Satz:

Die Gerade, welche den Schnittpunkt zweier Tangenten mit einem Brennpunkte verbindet, halbiert den Winkel, welchen die Geraden vom Brennpunkte nach den beiden Berührungspunkten miteinander bilden.

33) Das Stück einer beweglichen Tangente der Hyperbel, welches zwischen zwei festen Tangenten liegt, erscheint von einem Brennpunkt aus unter konstantem Winkel.

34) Eine bewegliche Tangente, welche von den beiden Asymptoten begrenzt wird, erscheint von den beiden Brennpunkten aus unter Winkeln, welche zusammen zwei Rechte betragen.

35) Jede von den beiden Scheiteltangenten begrenzte bewegliche Tangente erscheint von den beiden Brennpunkten aus unter rechtem Winkel. —

36) Zieht man durch einen Brennpunkt C die Gerade CD parallel zu einer Asymptote; ferner in D die Tangente DE, welche dieselbe Asymptote in E trifft, und verbindet man C mit E, so ist $\triangle$ CDE rechtwinklig bei C.

37) Wie lang ist ein unter dem Winkel φ gegen die Hauptachse geneigter Durchmesser der Hyperbel?

Antw. $$d = \frac{2ab}{\sqrt{e^2\cos^2\varphi - a^2}}.$$

38) Jeder Durchmesser einer Hyperbel ist die mittlere Proportionale zwischen der Hauptachse und derjenigen Brennpunktssehne, welche dem Durchmesser parallel ist. —

39) Die Gleichung der Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

kann man in zwei Gleichungen ersten Grades zerlegen, welche, miteinander multipliciert, wieder die Gleichung der Hyperbel geben, nämlich:

$$y = \frac{b}{a}(x + a)$$
$$y = \frac{b}{a}(x - a),$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{bn}{a}(x + a) \\ y &= \frac{b}{an}(x - a) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wenn n irgend ein beliebiger Zahlenfaktor ist. — Diejenigen Werte von x und y, welche den Gleichungen (2) zugleich genügen, werden auch die Gleichung (1) erfüllen. Diese Werte sind aber die Koordinaten des Durchschnittes der beiden Geraden (2), welcher hiernach zugleich ein Punkt der Hyperbel ist. — Indem man in (2) verschiedene Werte von n einführt, erhält man beliebig viele Paare von Geraden, deren Schnittpunkte auf der Hyperbel liegen. — Man leite hieraus eine Konstruktion der Hyperbel ab. —

40) Die Hyperbel ist der geometrische Ort eines Punktes P, welcher von einem ausserhalb eines festen Kreises K gegebenen Punkte M und dem Umfang des Kreises K gleiche Abstände hat.

41) Gegeben die beiden Brennpunkte und die Hauptachse einer Hyperbel. Man soll die Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden mit der Hyperbel durch Konstruktion finden.

42) Wie heisst die Scheitelgleichung der Hyperbel?

Antw. $y = \sqrt{\frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2}$ oder auch

$$y = \sqrt{-\frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2},$$

je nachdem der Scheitel rechts oder links vom Mittelpunkt als Anfangspunkt genommen wird.

Die allgemeine Form dieser Gleichung ist: $y = \sqrt{mx + nx^2}$, welche demnach eine Hyperbel bedeutet, wenn $n > 0$ ist. (Vergl. IV. A, 72.)

43) Die Gleichung der Hyperbel zu finden, wenn die Hauptachse durch den Anfangspunkt geht, und mit der Abscissenachse den Winkel α bildet.

Antw. Man findet wie in (IV. A, 74):

$$(e^2 \cos^2\alpha - a^2)x^2 + (e^2 \sin^2\alpha - a^2)y^2 + 2e^2xy \sin\alpha \cos\alpha = a^2b^2.$$

Die allgemeine Form dieser Mittelpunktsgleichung ist demnach:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy = D.$$

44) Wenn $a = b$ ist, so wird die Hyperbel eine gleichseitige Hyperbel genannt. — Warum stehen die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel senkrecht aufeinander? Wie heisst in diesem Falle die Gleichung der Hyperbel, wenn man die Asymptoten als Koordinatenachsen annimmt?

Antw. $$2xy = a^2.$$

Nimmt man die Hauptachse als Abscissenachse, so heisst die Mittelpunktsgleichung der gleichseitigen Hyperbel $y^2 - x^2 = -a^2$.

45) Sind die Koordinaten der Brennpunkte $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\beta_1)$, und bezeichnet man die Länge der Hauptachse mit $2a$, so soll gezeigt werden, dass die Gleichung der Hyperbel die allgemeine Form:

$$Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

annimmt.

46) Wie heisst die Polargleichung der Hyperbel, wenn ein Brennpunkt als Pol, und der feste Schenkel des veränderlichen Winkels φ in der Geraden vom Brennpunkt nach dem Scheitel angenommen wird?

Antw. $r = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}$ oder $r = \frac{p}{1 + \xi\cos\varphi}$,

wenn $p = \frac{b^2}{a}$, $\xi = \frac{e}{a}$ also $\xi > 1$.

47) Ebenso wenn der Pol im Mittelpunkt der Hyperbel liegt?

Antw. $$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}.$$

Anmerkung. Aus der letzten Gleichung folgt, dass r reell ist, solange $a^2\sin^2\varphi < b^2\cos^2\varphi^2$ ist. —

Wird $a^2\sin^2\varphi = b^2\cos^2\varphi$, d. h. $\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{b}{a}$, so wird $r = \infty$.

(Asymptote.)

48) Das Rechteck aus den Abschnitten einer Sehne S, welche durch den Brennpunkt geht, dividiert durch die ganze Sehne, giebt den konstanten Wert $\frac{b^2}{2a}$.

49) Welche Länge hat die durch einen Brennpunkt parallel zu einer Asymptote gezogene Gerade, welche an der Hyperbel endet?

Antw. $$\frac{b^2}{2a}.$$

50) Wie heisst die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel in Linienkoordinaten ausgedrückt?

Antw. $a^2u^2 - b^2v^2 = 1.$

51) Die Scheitelgleichung der Hyperbel zu finden.

Antw. $b^2v^2 - 2au + 1 = 0.$

52) Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel:

$$b^2v^2 = a^2u^2 - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

lässt sich schreiben: $b^2v^2 = (au + 1)(au - 1).$

Die beiden Gleichungen ersten Grades

$$\left.\begin{aligned} bv &= n\,(au + 1) \\ bv &= \frac{1}{n}(au - 1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

in welchen n eine beliebige Zahl ist, geben, miteinander multipliciert, die Gleichung (1). Alle Werte von u und v, welche den Gleichungen (2) genügen, werden auch die Gleichung der Hyperbel befriedigen. — Die Gleichungen (2), welche sich auch auf die Form

$$au - \frac{b}{n}v + 1 = 0$$

$$-au + bnv + 1 = 0$$

bringen lassen, sind aber die Gleichungen zweier Punkte mit den Koordinaten $a, -\frac{b}{n}$, bez. $-a, bn$; die Verbindungslinie dieser Punkte ist daher eine Tangente der Hyperbel. — Man leite hieraus eine Konstruktion der Hyperbel durch einhüllende Tangenten ab. —

53) Wie heisst die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Linienkoordinaten, wenn man die Asymptoten als Koordinatenachsen annimmt?

Antw. $2a^2uv = 1.$

Vermischte Aufgaben.

54) Die beiden Asymptoten einer Hyperbel und ein Punkt der letzteren sind gegeben. — Man soll eine beliebige Anzahl anderer Punkte der Hyperbel konstruieren. (s. 26) d. Abschn.

55) Von einem Dreieck ist die Grundlinie AB und die Differenz der Winkel an derselben gegeben. — Man soll den Ort des dritten Eckpunktes C bestimmen.

Antw. Man findet eine Hyperbel, deren Brennpunkte A und B sind.

56) Legt man durch irgend einen Punkt P der Hyperbel einen Kreis, welcher durch die beiden Brennpunkte geht, so schneidet derselbe die Ordinatenachse in den beiden Punkten, in welchen die Tangente und Normale des Punktes P dieselbe treffen.

57) Die Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden mit einer durch ihre beiden Brennpunkte und die Hauptachse gegebenen Hyperbel zu finden. (Konstruktionsaufgabe.)

58) Den Ort des Mittelpunktes eines Kreises zu finden, welcher auf den beiden Geraden $y = x$ und $y = -x$ die Sehnen 2 a und 2 b abschneidet.

Antw. Die Gleichung des Ortes ist: $2xy = a^2 - b^2$, woraus sich eine gleichseitige Hyperbel ergiebt.

59) Zeichnet man um einen Punkt der Ordinatenachse als Mittelpunkt einen Kreis, welcher die Hyperbel berührt, so schneidet derselbe auf jeder Asymptote eine Sehne von der Länge 2 a ab.

60) Zieht man im Endpunkt der Brennpunktsordinate einer Hyperbel die Tangente, dann ist die Entfernung eines beliebigen Punktes P der Hyperbel von diesem Brennpunkte gleich der in P errichteten und bis an jene Tangente verlängerten Ordinate.

61) Die beiden Asymptoten und eine Tangente einer Hyperbel sind gegeben. Es sollen beliebig viele andere Tangenten konstruiert werden.

Mit Hülfe von 20) zu lösen.

62) Der Ort des Schwerpunktes eines Dreiecks, dessen Ecken die beiden Brennpunkte und ein beliebiger Punkt der Hyperbel sind, ist eine der ersteren koncentrische und ähnliche Hyperbel.

63) Der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher zwei gegebene Kreise K_1 und K_2 berührt, ist eine Hyperbel, welche die Mittelpunkte der gegebenen Kreise zu Brennpunkten hat.

V. Abschnitt.

Koordinaten-Verwandlungen.

1) Die Koordinaten eines Punktes M sind x und y. — Man soll die Koordinaten $x'y'$ desselben Punktes in Bezug auf neue Achsen angeben, welche den ersteren parallel sind, wenn der neue Anfangspunkt die Koordinaten α und β hat. —

Antw. $x' = x - \alpha\,; \quad y' = y - \beta$

oder $x = \alpha + x'; \quad y = \beta + y'.$

2) Aus den Mittelpunktsgleichungen der Ellipse und Hyperbel die Scheitelgleichungen derselben abzuleiten.

3) Aus der Mittelpunktsgleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ die allgemeine Gleichung desselben abzuleiten, wenn α und β die Koordinaten des neuen Anfangspunktes sind.

4) Aus der Mittelpunktsgleichung einer Ellipse oder Hyperbel die Gleichungen dieser Kurven zu finden, wenn dieselben auf neue Koordinatenachsen bezogen werden, welche den Hauptachsen parallel sind. Die Koordinaten des neuen Anfangspunktes seien α und β.

Antw. Die Gleichung der Ellipse ist:

$$a^2y^2 + b^2x^2 + 2\,a^2\beta y + 2\,b^2\alpha x + a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2 = 0$$

und für die Gleichung der Hyperbel findet man:

$$a^2y^2 - b^2x^2 + 2\,a^2\beta y - 2\,b^2\alpha x + a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 + a^2b^2 = 0.$$

Die allgemeine Form beider Gleichungen ist:

$$Ay^2 + Bx^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

oder auch wenn man durch einen der Koeffizienten, etwa durch A, dividiert, und nach der Division die neuen Koeffizienten wieder mit A, B, C, D bezeichnet:

$$y^2 + Ax^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

Die Gleichung enthält die Quadrate der Veränderlichen x und y und Glieder mit den ersten Potenzen derselben; es fehlt jedoch das Produkt xy.

Ist A positiv, so bedeutet die Gleichung eine Ellipse, ist A negativ, eine Hyperbel. — Für $A = 1$ geht sie in die Gleichung des Kreises über.

5) Wie heisst die Gleichung der Parabel $y^2 = 2\,px$ in Bezug auf neue, den gegebenen parallele Achsen, wenn α und β die Koordinaten des neuen Anfangspunktes sind?

Antw. $y^2 - 2\,px + 2\,\beta y + \beta^2 - 2\,p\alpha = 0.$

Man sieht hieraus, dass die Gleichung (2) im vor. für $A = 0$ eine Parabel bedeutet. — Demnach ist (2) allgemein die Gleichung eines Kegelschnittes, dessen Achsen den Koordinatenachsen parallel sind.

6) Man soll aus der Gleichung:

$$8\,y^2 + 4\,x^2 - 16\,y + 16\,x - 32 = 0,$$

welche nach (4) eine Ellipse bedeutet, die Hauptachsen a und b derselben bestimmen.

Auflösung. — Indem man die Glieder, welche y^2 und y enthalten, ebenso diejenigen mit x^2 und x zu Quadraten ergänzt, erhält die gegebene Gleichung die Form:

$$8(y-1)^2 + 4(x+2)^2 = 56.$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$y - 1 = y'$, $x + 2 = x'$ oder $y = 1 + y'$; $x = -2 + x'$,

welches eine Parallelverschiebung der Koordinatenachsen bedeutet, so erhält man die Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$8y'^2 + 4x'^2 = 56.$$

In dieser Gleichung sind die Koeffizienten von y' und x' noch nicht gleich a^2 und b^2, weil die rechte Seite nicht dem Produkt der beiden Koeffizienten links gleich ist. — Man multipliciere die Gleichung deshalb mit dem unbestimmten Faktor k, so kommt:

$$8ky'^2 + 4kx'^2 = 56k,$$

und bestimme k so, dass:

$$8k \cdot 4k = 56k$$

so wird $k = \frac{7}{4}$. — Multipliciert man hiermit die Gleichung:

$$8y'^2 + 4x'^2 = 56,$$

so erhält man:

$$14y^2 + 7x^2 = 98,$$

woraus man sieht, dass $a = \sqrt{14}$, $b = \sqrt{7}$ ist.

7) Man bestimme die Achsen der Hyperbel, deren Gleichung ist:

$$4y^2 - x^2 - 10x + 16y + 7 = 0.$$

Antw. $a = 4$, $b = 2$.

8) Man soll aus der Gleichung: $y^2 - 8x + 12y - 10 = 0$, welche eine Parabel bedeutet, p bestimmen.

Antw. $p = 4$.

9) Was bedeuten die Gleichungen:

α) $5y^2 + 3x^2 + 24x + 21 = 0$

β) $y^2 + 12x - 96 = 0$

γ) $4y^2 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$

δ) $16y^2 - 9x^2 - 72x + 64y - 80 = 0$

ξ) $2y^2 + x^2 + 6x + 20y + 59 = 0$.

Aufl. α) Gleichung einer Ellipse, deren Achsen $a = 3$ und $b = 3\sqrt{\frac{3}{5}}$ sind.

β) Gleichung einer Parabel; $p = 6$.

γ) Gleichung einer Hyperbel, deren Achsen $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{6}$ sind.

δ) hat die Form der Gleichung einer Hyperbel. Sie zerfällt jedoch durch die Koordinaten-Verwandlung in das Produkt der beiden Gleichungen:

$$4y + 3x + 20 = 0$$
$$4y - 3x - 4 = 0,$$

d. h. sie bedeutet zwei gerade Linien. (Ausartung der Hyperbel.)

ξ) Die transformierte Gleichung heisst: $y = x\sqrt{-\frac{1}{2}}$, welche nur für $x = 0$ den reellen Wert $y = 0$ ergiebt; sie bedeutet demnach einen Punkt.

10) Die Koordinaten eines Punktes M sind x und y. — Man soll die Koordinaten desselben Punktes in Bezug auf ein neues Achsensystem bestimmen, dessen Anfangspunkt mit dem des ersten Systems zusammenfällt. Die neue XAchse bildet den Winkel φ mit der früheren Abscissenachse. —

Antw. Die Beziehungen zwischen den neuen Koordinaten x' und y' des Produktes M, und x, y sind:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned} \quad \text{oder:} \quad \begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= y\cos\varphi - x\sin\varphi. \end{aligned}$$

11) Was bedeutet die Gleichung $xy = 6$?

Antw. Man drehe die Achsen um den Winkel φ; die gegebene Gleichung heisst alsdann:

$$(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) = 6$$

oder:

$$x'^2\sin\varphi\cos\varphi - y'^2\sin\varphi\cos\varphi + x'y'(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 6.$$

Der Winkel φ kann so gewählt werden, dass das Produkt $x'y'$ herausfällt. Dazu ist erforderlich, dass $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0$ oder $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$ ist. Setzt man diesen Wert ein, so heisst die Gleichung der Kurve:

$$\tfrac{1}{2}x'^2 - \tfrac{1}{2}y'^2 = 6$$

oder:

$$y'^2 - x'^2 = -12.$$

Dies ist aber die Mittelpunktsgleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Achsen $a = b = \sqrt{12}$ sind.

12) Das Glied xy lässt sich durch eine Drehung der Achsen um den Anfangspunkt aus jeder Gleichung einer Kurve zweiten Grades beseitigen.

Beweis. Die Gleichung sei allgemein:

$$y^2 + ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0.$$

Um die Gleichung in Bezug auf die um den Winkel φ gedrehten Achsen zu bestimmen, sind für x und y die Werte aus 11) einzusetzen. Dies giebt:

$$(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 + a\,(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2$$
$$+ b\,(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)\,(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)$$
$$+ c\,(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)$$
$$+ d\,(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + e = 0.$$

Der Koeffizient von $x'y'$ heisst:

$$2 \sin\varphi \cos\varphi - 2\,a \sin\varphi \cos\varphi + b\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Man bestimme den Winkel φ so, dass dieser Koeffizient gleich Null wird, dann ergiebt sich der Wert von φ aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\,\varphi = \frac{b}{a - 1}.$$

Hieraus lässt sich φ immer bestimmen. (Der einzig mögliche Ausnahmefall, wo φ unbestimmt bleibt, ist der, wenn $b = 0$ und gleichzeitig $a = 1$ ist. — Die Gleichung geht aber für diesen Fall in die allgemeine Gleichung des Kreises über, in welcher ja das Produkt xy überhaupt nicht vorkommt.)

Ist $a = 1$ und b nicht gleich Null, so wird $\operatorname{tg} 2\,\varphi = \infty$, $2\,\varphi = 90°$, $\varphi = 45°$. — Wenn also in einer Gleichung zweiten Grades die Koeffizienten von x^2 und y^2 gleich 1, oder überhaupt einander gleich sind, so wird das Produkt xy durch eine Drehung der Achsen um einen Winkel von 45° beseitigt. —

13) Aus der Gleichung der Kurve zweiten Grades:

$$y^2 + x^2 + 6\,xy = 8$$

das Produkt xy fortzuschaffen. —

Antw. Durch Drehung der Achsen um 45° nimmt die Gleichung die Form an:

$$y^2 - 2\,x^2 = -4.$$

Dieselbe bedeutet demnach eine Hyperbel, deren Achsen $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ sind.

14) Die Beziehungen zwischen den Koordinaten des Punktes $M(x_1 y_1)$ und den auf ein beliebiges anderes Achsensystem bezogenen Koordinaten $x'y'$ desselben Punktes zu finden. Der neue Anfangspunkt habe die Koordinaten α und β, und die neue Abscissenachse bilde mit der früheren den Winkel φ.

Antw.
$$x = \alpha + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$$
$$y = \beta + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$$

15) Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes $M(xy)$ sollen durch die Polarkoordinaten, r und φ, desselben ausgedrückt werden. —

Liegt der Pol im Anfangspunkt der rechtwinkligen Koordinaten, und rechnet man den veränderlichen Winkel φ von der positiven Richtung der Abscissenachse aus, so hat man:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi; \quad \text{ferner} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Hat der Pol die Koordinaten α und β und bildet der feste Schenkel des Winkels φ mit der XAchse den Winkel ω, so ist:

$$x = \alpha + r\cos(\omega + \varphi), \quad y = \beta + r\sin(\omega + \varphi).$$

16) Welche Kurve ist in der Polargleichung: $r = \dfrac{b}{\sin\varphi - a\cos\varphi}$ enthalten?

Antw. Durch Umwandlung in eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Koordinaten erhält dieselbe die Form $y = ax + b$, und bedeutet deshalb eine Gerade.

17) Aus den Mittelpunktsgleichungen der Ellipse und Hyperbel die Polargleichungen derselben, sowohl für den Mittelpunkt, wie für einen Brennpunkt als Pol, zu finden.

18) Ebenso die in IV. B, 46 angegebene Polargleichung der Parabel aus ihrer Scheitelgleichung zu finden.

Ubergang von rechtwinkligen Koordinaten zu schiefwinkligen.

19) Die Koordinaten des Punktes M seien x, y; die neue XAchse falle mit der früheren zusammen und der Winkel zwischen den neuen Achsen sei φ. — Sind nun x', y' die schiefwinkligen Koordinaten des Punktes M, so findet man leicht:

$$x = x' + y'\cos\varphi$$
$$y = y'\sin\varphi.$$

20) Bildet die neue XAchse mit der früheren den Winkel ω, und sind die Koordinaten des neuen Anfangspunktes α und β, der Winkel zwischen den neuen Achsen gleich φ, so hat man:

$$x = \alpha + x'\cos\omega + y'\cos(\omega + \varphi)$$
$$y = \beta + x'\sin\omega + y'\sin(\omega + \varphi).$$

21) Zu beweisen, dass die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel, bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser a_1 und b_1 als Koordinatenachsen, sind:

$$a_1{}^2 y_1{}^2 + b_1{}^2 y_1{}^2 = a_1{}^2 b_1{}^2 \quad \text{bez.} \quad a_1{}^2 y_1{}^2 - b_1{}^2 x_1{}^2 = - a_1{}^2 b_1{}^2.$$



22) Die allgemeine Gleichung zweiten Grades:

$$y^2 + ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0$$

bedeutet stets einen Kegelschnitt. Man kann nämlich nach 12) das Glied xy immer durch eine Koordinatenverwandlung fortschaffen, wodurch die Gleichung auf die Form der Gleichung 2 in 4) gebracht wird. — Um noch ein Kennzeichen zu erhalten, welchen Kegelschnitt die allgemeine Gleichung darstellt, sucht man zu ermitteln, ob die Kurve unendlich ferne Punkte hat, oder nicht. — Die Gleichung giebt, nach y aufgelöst:

$$y = \frac{-(bx + d) \pm \sqrt{(b^2 - 4a)x^2 + 2(bd - 2c)x + d^2 - 4e}}{2}.$$

Es sei nun:

1) $b^2 - 4a > 0$, dann kann x sowohl nach positiver als negativer Seite unendlich werden. — Man erhält also vier unendliche Zweige. — Die Gleichung bedeutet eine Hyperbel. Ist zugleich noch $bd - 2c = 0$ und $d^2 - 4e = 0$ so heisst die Gleichung:

$$y = \frac{-(bx + d) \pm x\sqrt{b^2 - 4a}}{2}$$

welche zwei Geraden bedeutet.

2) $b^2 - 4a < 0$. In diesem Falle muss x endlich bleiben, wenn y reell sein soll. — Die Kurve ist eine Ellipse, welche als besonderen Fall den Kreis einschliesst. — Ist gleichzeitig $bd - 2c = 0$, $d^2 - 4e = 0$ so ist y nur für $x = 0$ reell. — Man erhält in diesem Falle nur einen Punkt. —

3) $b^2 - 4a = 0$. x kann, wenn $bd - 2c$ positiv ist, nur nach positiver Seite, und wenn $bd - 2c < 0$, nur nach negativer Seite unendlich werden. — Die Kurve hat zwei unendliche Zweige, ist also eine Parabel. Ist zugleich $bd - 2c = 0$, so heisst die Gleichung:

$$y = \frac{-(bx + d) \pm \sqrt{d^2 - 4e}}{2},$$

welche, wenn $d^2 - 4e > 0$ zwei parallele Geraden darstellt. —

Ist $bd - 2c = 0$ und zugleich $d^2 - 4e = 0$, dann fallen beide Geraden zusammen. — Wenn aber $d^2 - 4e < 0$, so ist für jeden Wert von x das zugehörige y imaginär. —

23) Die allgemeine Bedingung anzugeben, unter welcher die Gleichung einer Kurve zweiten Grades in das Produkt aus den Gleichungen zweier Geraden zerfällt.

Antw.

Ist $y = \frac{-(bx + d) \pm \sqrt{(b^2 - 4a)x^2 + 2(bd - 2c)x + d^2 - 4e}}{2}$,

so muss der Ausdruck unter der Wurzel ein Quadrat sein. — Dies ist der Fall, wenn:

$$(bd - 2c)^2 = (b^2 - 4a)(d^2 - 4e).$$

24) Sind in der allgemeinen Gleichung c und d gleich Null, so erhält sie die Form:

$$y^2 + ax^2 + bxy + e = 0.$$

Genügen $x = \alpha$ und $y = \beta$, so ist dasselbe auch mit den Werten: $x = -\alpha$ und $y = -\beta$ der Fall. — Die Gleichung ist demnach die Mittelpunktsgleichung eines Kegelschnittes, jedoch nicht auf die Hauptachsen bezogen. —

25) Welche Bedeutung haben die Gleichungen:

1) $y^2 + 2x^2 + 6xy - 4x + y - 8 = 0$
2) $y^2 + 6x^2 + 5xy + 10x + 2y - 24 = 0$
3) $y^2 + 4x^2 + 2xy - 8x + 12y - 2 = 0$
4) $y^2 + 8x^2 + 2xy + 10x + 10y + 25 = 0$
5) $y^2 + 4x^2 + 4xy - 16x = 0$
6) $y^2 + 4x^2 + 4xy + 2y + 4x - 15 = 0$
7) $y^2 + 9x^2 - 6xy - 12x + 4y + 4 = 0$.

Antw. 1) stellt eine Hyperbel dar.
2) zwei gerade Linien, deren Gleichungen sind:
$y + 2x + 6 = 0, \quad y + 3x - 4 = 0.$
3) bedeutet eine Ellipse.
4) giebt nur einen Punkt, dessen Koordinaten 0 und -5 sind.
5) ist die Gleichung einer Parabel.
6) bedeutet zwei parallele Geraden, deren Gleichungen sind: $y + 2x - 3 = 0, \quad y + 2x + 5 = 0.$
7) zwei zusammenfallende Geraden, deren gemeinschaftliche Gleichung ist: $y - 3x + 2 = 0.$

VI. Abschnitt.

A. Die Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

1) Die höchste Dimension, in welcher die Veränderlichen x und y in der Gleichung einer Kurve vorkommen, heisst die Ordnung der Kurve; ist aber ihre Gleichung in Linienkoordinaten gegeben, so heisst die höchste Dimension der u und v die Klasse der Kurve. — Im folgenden soll gezeigt werden, dass alle Kurven zweiter Ordnung auch zugleich Kurven zweiter Klasse sind und zwar diejenigen, welche schon in den früheren Abschnitten als Kegelschnitte bezeichnet wurden.

2) Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektivischen Strahlenbüschel, welche nicht in perspektivischer Lage sind, und deren Mittelpunkte S_1 und S_2 nicht zusammenfallen, bilden eine Kurve zweiter Ordnung. Fig. 40.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektivischen Punktreihen, welche nicht in perspektivischer Lage sind, und deren Träger α und β nicht zusammenfallen, umhüllen eine Kurve zweiter Klasse. Fig. 41.

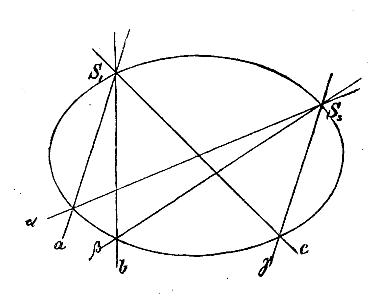


Fig. 40.

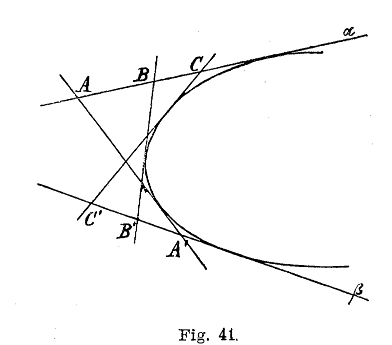


Fig. 41.

Sind nämlich:

$$\left.\begin{array}{rl} & G_1 + kG_2 = 0 \\ \text{und} & H_1 + kH_2 = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichungen der beiden Büschel, so ergiebt sich der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen durch Elimination des veränderlichen Faktors k. Man erhält dem-

Sind nämlich:

$$\left.\begin{array}{rl} & P_1 + kP_2 = 0 \\ \text{und} & Q_1 + kQ_2 = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (1')$$

die Gleichungen der beiden Punktreihen, so ergiebt sich die Gleichung der von den Verbindungslinien entsprechender Punkte eingehüllten Kurve durch Elimination des ver-

nach als Gleichung des Ortes:

$$G_1 H_2 - G_2 H_1 = 0$$

oder auch: $\begin{vmatrix} G_1 G_2 \\ H_1 H_2 \end{vmatrix} = 0$. (2)

Da hierin G_1, G_2, H_1 und H_2 Funktionen ersten Grades von x und y sind, so folgt, dass die gefundene Gleichung vom zweiten Grade ist.

Die Kurve geht durch die beiden Mittelpunkte S_1 und S_2, weil S_1 der Schnittpunkt der Geraden:

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0 \quad . \quad (3)$$

und S_2 der Schnittpunkt der Geraden:

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0 \quad . \quad (4)$$

ist. — Für diejenigen Werte von x und y, welche den Gleichungen (3) oder den Gleichungen (4) zugleich genügen, verschwindet auch die linke Seite von (2).

änderlichen Faktors k. Man erhält demnach als Gleichung der Kurve:

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = 0$$

oder auch: $\begin{vmatrix} P_1 P_2 \\ Q_1 Q_2 \end{vmatrix} = 0$. (2′)

Da hierin P_1, P_2, Q_1, Q_2 Funktionen ersten Grades von u und v sind, so folgt, dass die gefundene Gleichung vom zweiten Grade ist.

Die Kurve berührt die beiden Träger α und β, weil α die Verbindungslinie der Punkte:

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0 \quad . \quad (3')$$

und β die Verbindungslinie der Punkte:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0 \quad . \quad (4')$$

ist. — Für diejenigen Werte von u und v, welche den Gleichungen (3′) oder den Gleichungen (4′) zugleich genügen, verschwindet auch die linke Seite von (2′).

Beispiele hierzu sind die Ellipsenkonstruktionen in (IV. A, 66), wo zwei ähnliche Punktreihen $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots$, $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \ldots$ aus den Mittelpunkten J bez. H projiciert werden. Ferner (IV. A, 82) Fig. 31, wo die Punktreihe FG durch zwei perspektivische Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten D und H auf HJ und JK projiciert wird. — Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der dadurch bestimmten projektivischen Punktreihen (wie z. B. PQ) sind Tangenten der Kurve.

Wird die Gleichung (2) entwickelt, und nach Potenzen von x und y geordnet, so erhält sie die Form:

$$y^2 + ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0.$$

(y^2 hat den Faktor 1, da man die Gleichung durch den etwaigen Faktor von y^2 dividieren kann.)

Wird die Gleichung (2′) entwickelt, und nach Potenzen von u und v geordnet, so erhält sie die Form:

$$v^2 + Au^2 + Buv + Cu + Dv + E = 0.$$

v^2 hat den Faktor 1, da man die Gleichung durch den etwaigen Faktor von v^2 dividieren kann.

3) Eine Kurve zweiter Ordnung kann von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden.

Durch einen Punkt lassen sich an eine Kurve zweiter Klasse nur zwei Tangenten ziehen. —

Beweis leicht.

4) Eine Kurve zweiter Ordnung ist durch 5 Punkte, von denen jedoch nicht drei in gerader Linie liegen dürfen, bestimmt.

Eine Kurve zweiter Klasse ist durch 5 Tangenten, von denen jedoch nicht drei durch einen Punkt gehen dürfen, bestimmt.

Die allgemeine Gleichung der Kurve zweiter Ordnung bez. Klasse enthält nämlich 5 Konstanten. Die Nebenbedingung ergiebt sich aus (3).

5) Aus 5 gegebenen Punkten einer Kurve zweiter Ordnung andere Punkte der Kurve zu konstruieren.

Aus 5 gegebenen Tangenten einer Kurve zweiter Klasse andere Tangenten der Kurve zu konstruieren.

Anl. zur Auflösung. Man betrachte zwei der gegebenen Punkte als Mittelpunkte von projektivischen Strahlenbüscheln und projiciere aus diesen die drei anderen Punkte. Da nun 3 Paare entsprechender Strahlen der Büschel gegeben sind, so kann man zu einem beliebigen vierten Strahle des einen Büschels den entsprechenden Strahl des andern bestimmen. Der Schnittpunkt dieser Strahlen ist ein neuer Punkt der Kurve.

Anl. zur Auflösung. Man betrachte zwei der gegebenen Tangenten als Träger von zwei projektivischen Punktreihen; die drei anderen Tangenten sind dann die Verbindungslinien entsprechender Punkte. — Da nun drei Paare entsprechender Punkte der Reihen gegeben sind, so kann man zu einem beliebigen vierten Punkte der einen Reihe den entsprechenden Punkt der anderen bestimmen. — Die Verbindungslinie dieser Punkte ist eine neue Tangente der Kurve.

(s. II. A, 134, 135.)

Satz des Pascal.

6) In jedem einer Kurve zweiter Ordnung einbeschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Paare gegenüberliegender Seiten in Punkten einer Geraden. Fig. 42.

Betrachtet man nämlich die Punkte 2 und 6 als Mittelpunkte von zwei projektivischen Strahlen-

Satz des Brianchon.

In jedem einer Kurve zweiter Klasse umbeschriebenen Sechsseit schneiden sich die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Eckpunkte in einem Punkte. Fig. 43.

Betrachtet man nämlich die beiden Tangenten α und β als Träger der beiden projektivischen

büscheln, so schneiden dieselben auf den Geraden 45, bez. 34 projektivische Punktreihen aus, welche

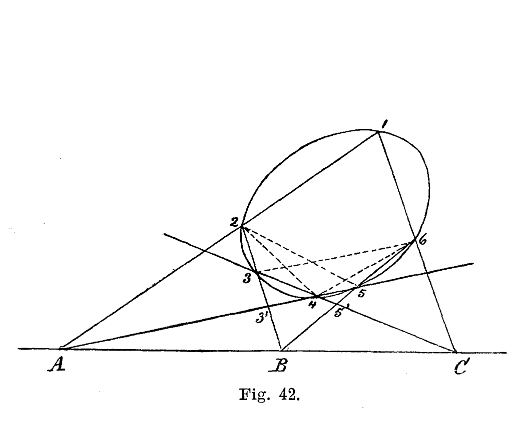


Fig. 42.

den Punkt 4 entsprechend gemeinschaftlich haben und deshalb perspektivisch liegen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte, wie 33′, 55′, AC schneiden sich deshalb in einem Punkte B. — Folglich liegen A, B und C in einer Geraden.

Punktreihen a, 4 . . . , a′, 5, . . . und projiciert dieselben durch die Büschel mit den Mittelpunkten S_1

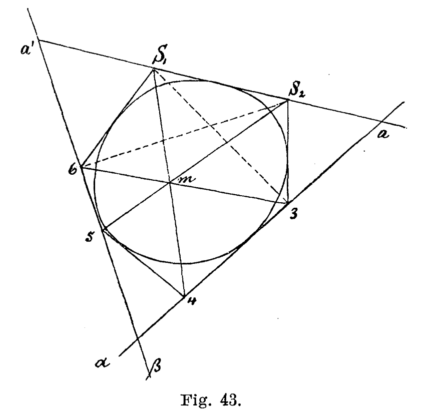


Fig. 43.

bez. S_2, so haben diese Büschel den Strahl a′a entsprechend gemeinschaftlich. — Sie liegen also perspektivisch und die Schnittpunkte entsprechender Strahlen müssen deshalb auf einer Geraden liegen. Solche Punkte sind aber 6, m und 3. — Folglich gehen auch die drei Geraden $S_1 4$, $S_2 5$, 6 3 durch einen Punkt m.

Mit Hülfe dieser Sätze löse man auch die Aufgaben 5).

Man beweise die folgenden speciellen Fälle der Sätze von Pascal und Brianchon:

7) Ist ein Fünfeck 1 2 3 4 5 einer Kurve zweiter Ordnung einbeschrieben, so schneiden sich die abwechselnd liegenden Seiten 1 2 und 3 4, ferner 2 3 und 4 5, endlich 1 5 und die Tangente im gegenüberliegenden Eckpunkte 3, in drei Punkten einer Geraden.

Ist ein Fünfseit 1 2 3 4 5 einer Kurve zweiter Klasse umbeschrieben, so gehen die Verbindungslinien der Schnittpunkte 1 und 4; 2 und 5, endlich die von 3 mit dem Berührungspunkte der gegenüberliegenden Tangente 1 5 durch einen Punkt.

8) Ist ein Viereck 1 2 3 4 einer Kurve zweiter Ordnung einbe-

Ist ein Vierseit einer Kurve zweiter Klasse umbeschrieben, so

schrieben, so treffen sich die Seite 1 2 und die Tangente in 3; die Seite 3 4 und die Tangente in 2, endlich die Seiten 2 3 und 1 4 in Punkten einer Geraden.

schneiden sich die beiden Diagonalen und die Verbindungslinien der Berührungspunkte zweier gegenüberliegenden Seiten in einem Punkte.

9) Ist ein Dreieck einer Kurve zweiter Ordnung einbeschrieben, so liegen die drei Punkte, in welchen die drei Seiten bez. die Tangenten in den gegenüberliegenden Eckpunkten treffen, auf einer Geraden.

Ist ein Dreiseit einer Kurve zweiter Klasse umbeschrieben, so gehen die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt.

10) Vier Punkte einer Kurve zweiter Ordnung und die Tangente in einem dieser Punkte sind gegeben. Man soll andere Punkte der Kurve konstruieren.

Vier Tangenten einer Kurve zweiter Klasse und der Berührungspunkt einer dieser Tangenten sind gegeben. — Man soll andere Tangenten der Kurve konstruieren.

11) Drei Punkte einer Kurve zweiter Ordnung, und die Tangenten in zwei von diesen Punkten sind gegeben; man soll andere Punkte der Kurve bestimmen.

Drei Tangenten einer Kurve zweiter Klasse, und die Berührungspunkte von zweien dieser Tangenten sind gegeben; man soll andere Tangenten der Kurve bestimmen.

Lösung von Aufgaben zweiten Grades.

12) Eine Gerade G schneidet eine Kurve zweiter Ordnung im allgemeinen in zwei Punkten. — Nimmt man auf der Kurve zwei beliebige Punkte als Mittelpunkte von zwei projektivischen Strahlenbüscheln an, welche die übrigen Punkte der Kurve auf G projicieren, so entstehen auf der letzteren zwei projektivische Punktreihen. In den Schnittpunkten der Geraden G mit der Kurve treffen sich je zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel, daher fallen in jedem dieser Punkte zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen zusammen. — Hieraus folgt:

In zwei projektivischen Punktreihen, welche denselben Träger haben, sind stets zwei Punkte vorhanden, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Man nennt dieselben die Doppelpunkte der beiden Reihen. —

Um die Doppelpunkte von zwei projektivischen Punktreihen zu finden, nimmt man irgend eine Kurve zweiter Ordnung, also am einfachsten einen gezeichneten Kreis K zu Hülfe. Es seien I, II, III

und 1, 2, 3 (Fig. 44) drei Paare entsprechender Punkte von zwei projektivischen Punktreihen, welche beide auf der Geraden α liegen. — Auf dem Hülfskreise K wähle man den Punkt S beliebig als Mittelpunkt zweier projektivischen Strahlenbüschel, welche die gegebenen

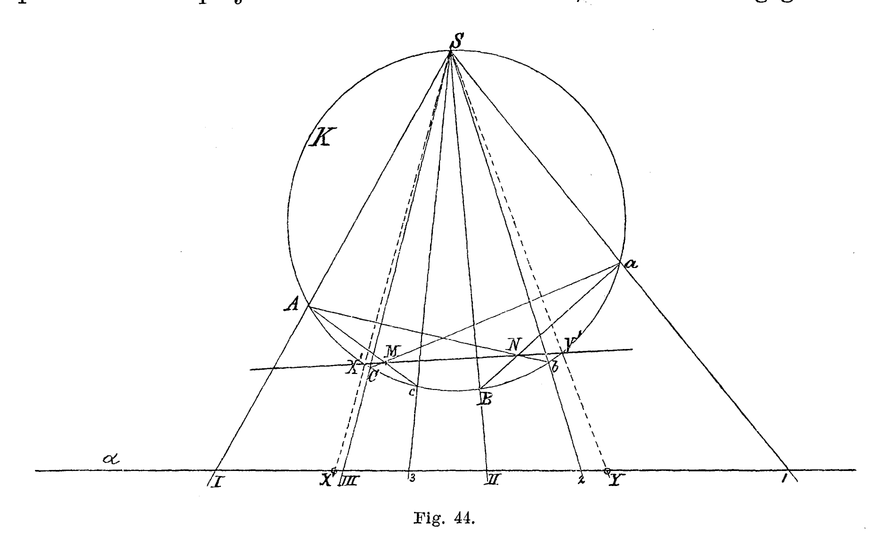


Fig. 44.

Punkte projicieren. — Die Strahlen des einen Büschels S (I II III) treffen den Kreis in A, B, C; die Strahlen des zweiten Büschels S (1, 2, 3) in a, b und c. Projiciert man nun die Punkte a, b, c aus dem Mittelpunkte A und die Punkte A, B, C aus dem Mittelpunkte a, so sind diese beiden Büschel projektivisch, denn:

A (a, b, c) ist projektivisch S (a, b, c) oder S (1, 2, 3),
a (A, B, C) „ „ S (A, B, C) „ S (I, II, III).

Nach Voraussetzung sind aber die Büschel S (1, 2, 3) und S (I, II, III) projektivisch, folglich auch A (a, b, c) und a (A, B, C). — Die beiden letzteren haben den Strahl Aa entsprechend gemeinschaftlich, folglich sind diese Büschel in perspektivischer Lage, und die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen liegen auf einer Geraden. — Nun schneiden sich Ac und aC in M; Ab und aB in N; zieht man also MN, so schneidet diese Gerade den Kreis in X′ und Y′. — In jedem dieser beiden letzten Punkte schneiden sich also entsprechende Strahlen der Büschel A (a, b, c) und a (A, B, C). Die Strahlen SX′ und SY′ sind demnach zwei sich selbst entsprechende Strahlen (Doppelstrahlen) der Büschel S (I, II, III) und S (1, 2, 3), und somit schneiden dieselben auf α die gesuchten Doppelpunkte X und Y der gegebenen Reihen aus.

Mit Hülfe des vorstehenden Satzes lassen sich nun Aufgaben zweiten Grades lösen, wenn man einen gezeichneten Kreis zu Hülfe nimmt.

Man bestimme die Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden mit einer durch 5 Punkte gegebenen Kurve zweiter Ordnung.

13) Ein Dreieck zu konstruieren, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte S_1, S_2 und S_3 gehen, und dessen Ecken auf drei gegebenen Geraden α, β und γ liegen. — Fig. 45.

Aufl. Man projiciere einen beliebigen Punkt D der Geraden α aus S_1 nach β; von hier aus S_2 nach γ, und nun weiter von S_3 aus zurück nach α, so erhält man in dieser Geraden den Punkt d. — Wenn dieser letztere mit D zusammengefallen wäre, so hätte man das gesuchte Dreieck gefunden. Projiciert man nun noch zwei andere Punkte E und F auf dieselbe Weise wie D nach e und f, zurück auf die Gerade α, so sind D, E, F und d, e, f drei Paare entsprechender Punkte von zwei auf α liegenden projektivischen Punktreihen (denn die Büschel S_1, S_2, S_3 liegen paarweise perspektivisch). Man konstruiere nun nach 12) die Doppelpunkte A und a beider Reihen, dann kann jeder derselben als ein erster Eckpunkt des gesuchten Dreiecks betrachtet werden. — Es giebt deshalb zwei Dreiecke ABC und abc, welche der Aufgabe genügen. —

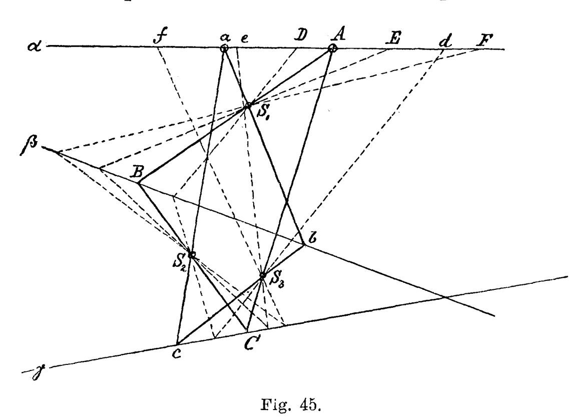


Fig. 45.

14) Auf gleiche Weise löse man die Aufgabe: Ein Vieleck zu konstruieren, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen, und dessen Ecken in gegebenen Geraden liegen.

15) Fünf Tangenten einer Kurve zweiter Klasse sind gegeben. — Man soll die Tangenten konstruieren, welche sich von einem gegebenen Punkte S an die Kurve legen lassen.

Aufl. Drei der gegebenen Tangenten z. B. β, γ und δ (Fig. 46) schneiden auf den beiden andern α und ξ die projektivischen Punktreihen I, II, III und bez. 1, 2, 3 ab. Man konstruiere nun die Doppelstrahlen ST und SU der beiden projektivischen Büschel

S (I, II, III) und S (1, 2, 3), so werden diese die beiden gesuchten Tangenten sein.

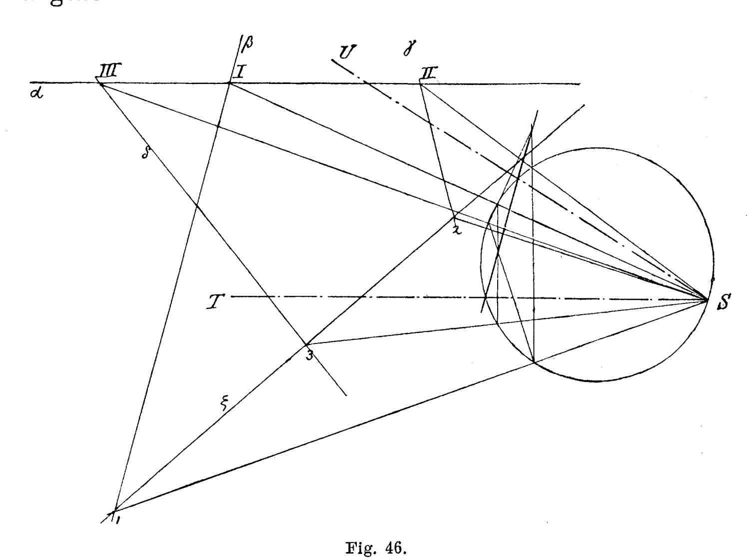


Fig. 46.

16) In einen Kreis (oder in eine Kurve zweiter Ordnung) ein Dreieck zu legen, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

17) Einem Kreis (oder einer Kurve zweiter Klasse) ein Dreieck zu umschreiben, dessen Ecken auf gegebenen Geraden liegen.

18) Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf gegebenen Geraden liegen, und dessen Seiten drei gegebenen Geraden parallel sind.

19) Ein Vieleck zu zeichnen, dessen Ecken auf gegebenen Geraden liegen, und dessen Seiten gegebenen Geraden parallel sind.

20) Es soll einem Dreieck ein Quadrat einbeschrieben werden, dessen Grundlinie in einer Dreiecksseite liegt, während zwei Eckpunkte auf die beiden andern Seiten des Dreiecks fallen. —

Pol und Polare.

21) Die allgemeinste Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung ist:

$$ay^2 + bx^2 + 2cxy + 2dy + 2ex + f = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

Es sollen nun zunächst die Koordinaten der Punkte gefunden werden, in welchen die Verbindungs-

Die allgemeinste Gleichung einer Kurve zweiter Klasse ist:

$$Av^2 + Bu^2 + 2Cuv + 2Dv + 2Eu + F = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

Es sollen nun zunächst die Koordinaten der Tangenten gefunden werden, welche von dem Schnitt-

linie zweier gegebenen Punkte $M_1(x_1 y_1)$, $M_2(x_2 y_2)$ die Kurve schneidet.

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes, welcher auf $M_1 M_2$ liegt, sind:

$$\frac{x_1 + k x_2}{1+k}, \quad \frac{y_1 + k y_2}{1+k}; \quad \text{s. (I, 8).}$$

Soll dieser Punkt auf der Kurve (1) liegen, so müssen seine Koordinaten der Gleichung (1) genügen. — Man erhält demnach zur Bestimmung von k die Gleichung:

$$P + 2Q \cdot k + Rk^2 = 0 \cdot \quad (2)$$

In dieser Gleichung ist:

$$P = ay_1^2 + bx_1^2 + 2cx_1y_1 + 2dy_1 + 2ex_1 + f.$$

$$Q = ay_1y_2 + bx_1x_2 + cy_1x_2 + cx_1y_2 + dy_1 + dy_2 + ex_1 + ex_2 + f.$$

$$R = ay_2^2 + bx_2^2 + 2cx_2y_2 + 2dy_2 + 2ex_2 + f.$$

Die Auflösung der Gleichung (2) giebt:

$$k = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - PR}}{R}.$$

Man erhält demnach zwei Schnittpunkte, welche mit den beiden gegebenen Punkten ein gewisses Doppelverhältnis bilden.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wenn $Q = 0$ ist. — Für k erhält man alsdann: $\pm\sqrt{\frac{-P}{R}}$. Bezeichnet man die Punkte, welche diesen beiden Werten von k entsprechen, mit N_1 und N_2, so sind nach (II, 129 und 131) die Punkte

punkte der beiden Geraden $P_1(u_1 v_1)$, $P_2(u_2 v_2)$ an die Kurve gezogen werden können.

Die Koordinaten einer beliebigen Geraden, welche durch den Schnittpunkt von P_1 und P_2 geht, sind:

$$\frac{u_1 + k u_2}{1+k}, \quad \frac{v_1 + k v_2}{1+k}; \quad \text{s. (II, 132).}$$

Soll diese Gerade die Kurve berühren, so müssen ihre Koordinaten der Gleichung (1) genügen. — Man erhält demnach zur Bestimmung von k die Gleichung:

$$p + 2qk + rk^2 = 0 \cdot \quad (2)$$

In dieser Gleichung ist:

$$p = Av_1^2 + Bu_1^2 + 2Cu_1v_2 + 2Dv_1 + 2Eu_1 + F.$$

$$q = Av_1v_2 + Bu_1u_2 + Cv_1u_2 + Cu_1v_2 + Dv_1 + Dv_2 + Eu_1 + Eu_2 + F.$$

$$r = Av_2^2 + Bu_2^2 + 2Cu_2v_2 + 2Dv_2 + 2Eu_2 + F.$$

Die Auflösung der Gleichung (2) giebt:

$$k = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - pr}}{q}.$$

Man erhält demnach zwei Tangenten, welche mit den beiden gegebenen Geraden P_1 und P_2 ein gewisses Doppelverhältnis bilden.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wenn $q = 0$ ist. Für k erhält man alsdann: $k = \pm\sqrt{\frac{-p}{r}}$. Bezeichnet man die Tangenten, welche diesen beiden Werten von k entsprechen, mit S_1 und S_2, so sind nach (II, 131) P_1, P_2, S_1 u. S_2

M_1, M_2, N_1 und N_2 vier harmonische Punkte. Es ist nämlich das Abstandsverhältnis des Punktes N_1 von M_1 und M_2 demjenigen des Punktes N_2 von M_1 und M_2 gleich.

Die Gleichung $Q = 0$ ist in Bezug auf x_1, y_1 sowohl als auch in Bezug auf x_2, y_2 vom ersten Grade. Nimmt man also den Punkt $M_2(x_2 y_2)$ als fest und $M_1(x_1 y_1)$ als beweglich an, so bedeutet die Gleichung $Q = 0$ eine Gerade, die Polare des Punktes M_2 als Pol. Jede durch M_2 gehende Gerade schneidet die Polare und die Kurve in drei Punkten, welche mit M_2 eine Gruppe von 4 harmonischen Punkten bilden. — Ebenso bedeutet $Q = 0$ die Gleichung der Polare des Punktes M_1, wenn der letztere fest und M_2 beweglich angenommen wird.

Weil die Vertauschung von x_1 und y_1 mit x_2 und y_2 die Gleichung $Q = 0$ nicht ändert, so folgt noch weiter:

Liegt M_1 auf der Polare von M_2, so geht die Polare von M_1 durch M_2, oder:

Bewegt sich M_1 auf der Polare von M_2, so dreht sich die Polare von M_1 um M_2.

vier harmonische Strahlen. Es ist nämlich das Abstandsverhältnis des Strahles S_1 von P_1 und P_2 demjenigen des Strahles S_2 von P_1 und P_2 gleich.

Die Gleichung $q = 0$ ist in Bezug auf u_1, v_1 sowohl als auch in Bezug auf u_2, v_2 vom ersten Grade. Nimmt man also den Strahl $P_2(u_2 v_2)$ als fest und $P_1(u_1 v_1)$ als beweglich an, so bedeutet die Gleichung $q = 0$ einen Punkt, den Pol der Geraden P_2 als Polare. Von jedem Punkte der Geraden P_2, z. B. von R, kann man zwei Tangenten an die Kurve ziehen, welche mit P_2 und der von R nach dem Pol von P_2 gehenden Geraden eine Gruppe von 4 harmonischen Strahlen bilden. — Ebenso bedeutet $q = 0$ die Gleichung des Pols der Geraden P_1, wenn die letztere fest, und P_2 beweglich angenommen wird.

Weil die Vertauschung von u_1 und v_1 mit u_2 und v_2 die Gleichung $q = 0$ nicht ändert, so folgt noch weiter:

Geht P_1 durch den Pol von P_2, so liegt der Pol von P_1 auf P_2, oder:

Dreht sich P_1 um den Pol von P_2, so bewegt sich der Pol von P_1 auf P_2.

Verbindet man den Punkt M mit einem der beiden Punkte, in welchen die Polare von M die Kurve schneidet, durch die Gerade S, so fallen ein Durchschnittspunkt des Strahles S mit der Kurve, und der Punkt, in welchem S die Polare von M trifft, zusammen. Folglich

muss auch der zweite Schnittpunkt des Strahles S und der Kurve mit diesen zusammenfallen; d. h. S ist eine Tangente der Kurve.

Die Gleichung der Polare des Punktes $M_2(x_2 y_2)$, nämlich:

$$Q = 0,$$

heisst nach x_1 und y_1 geordnet:

$$y_1(ay_2 + cx_2 + d) + x_1(bx_2 + cy_2 + e) + dy_2 + ex_2 + f = 0 \quad (3)$$

Es sind demnach die Koordinaten der Polare von M_2:

$$u = \frac{cy_2 + bx_2 + e}{dy_2 + ex_2 + f},$$
$$v = \frac{ay_2 + cx_2 + d}{dy_2 + ex_2 + f}.$$

oder wenn man den gemeinschaftlichen Nenner mit p bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} pv &= ay_2 + cx_2 + d \\ pu &= cy_2 + bx_2 + e \\ p &= dy_2 + ex_2 + f \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Sind u und v gegeben, so erhält man durch Auflösung dieser Gleichungen nach x_2 und y_2 die Koordinaten des Pols der Geraden P (u, v), nämlich:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \frac{p(Av + Cu + D)}{\Delta} \\ x_2 &= \frac{p(Cv + Bu + E)}{\Delta} \\ \text{und zugleich:} \\ 1 &= \frac{p(Dv + Eu + F)}{\Delta} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

In diesen Gleichungen ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & c, & d \\ c, & b, & e \\ d, & e, & f \end{vmatrix}$$

die Determinante der Kurve. Sie ist in Bezug auf die Diagonalreihe

Die Gleichung des Pols der Geraden $P_2(u_2 v_2)$, nämlich:

$$q = 0,$$

heisst nach u_1 und v_1 geordnet:

$$v_1(Av_2 + Cu_2 + D) + u_1(Cv_2 + Bu_2 + E) + Dv_2 + Eu_2 + F = 0 \quad (3)$$

Es sind demnach die Koordinaten des Pols von P_2:

$$x = \frac{Cv_2 + Bu_2 + E}{Dv_2 + Eu_2 + F};$$
$$y = \frac{Av_2 + Cu_2 + D}{Dv_2 + Eu_2 + F}.$$

oder wenn man den gemeinschaftlichen Nenner mit P bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} Py &= Av_2 + Cu_2 + D \\ Px &= Cv_2 + Bu_2 + E \\ P &= Dv_2 + Eu_2 + F \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Sind x und y gegeben, so erhält man durch Auflösung der Gleichungen (4) nach u_2 und v_2 die Koordinaten der Polare des Punktes M (x, y), nämlich:

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \frac{P(ay + cx + d)}{\delta} \\ u_2 &= \frac{P(cy + bx + e)}{\delta} \\ \text{und zugleich:} \\ 1 &= \frac{P(dy + ex + f)}{\delta} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

In diesen Gleichungen ist:

$$\delta = \begin{vmatrix} A, & C, & D \\ C, & B, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix}$$

die Determinante der Kurve. Sie ist in Bezug auf die Diagonalreihe

symmetrisch. A, B, C, D, E, F sind die Unterdeterminanten derselben. —

Setzt man zunächst voraus, dass Δ nicht verschwindet, dann sind die Koordinaten des Pols der Geraden P (u, v) durch die Gleichungen (5) bestimmt.

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man auch die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung in Linienkoordinaten ausdrücken. Sind nämlich u und v die Koordinaten der Polare des Punktes $M_2(x_2 y_2)$, so heisst die Gleichung der Polare:

$$ux + vy + 1 = 0 \quad \cdot \quad (6)$$

wobei zwischen u, v und x_2, y_2 die Gleichungen (5) bestehen. Liegt nun M auf seiner Polare, so ist die letztere eine Tangente der Kurve, und die Koordinaten von M müssen der Gleichung (6) genügen. Setzt man die Werte von x_2 und y_2 in (6) ein, so ergiebt sich als Bedingung dafür, dass M auf seiner Polare liegt:

$$\frac{vp(Av + Cu + D)}{\Delta} + \frac{up(Cv + Bu + E)}{\Delta} + 1 = 0$$

oder, wenn man statt 1 den Wert aus der dritten Gleichung (5) setzt:

$$\frac{vp(Av + Cu + D)}{\Delta} + \frac{up(Cv + Bu + E)}{\Delta} + \frac{p(Dv + Eu + F)}{\Delta} = 0$$

symmetrisch. a, b, c, d, e, f sind die Unterdeterminanten derselben.

Setzt man zunächst voraus, dass δ nicht verschwindet, dann sind die Koordinaten der Polare des Punktes M (x, y) durch die Gleichungen (5) bestimmt.

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man auch die Gleichung einer Kurve zweiter Klasse in Punktkoordinaten ausdrücken. Sind nämlich x und y die Koordinaten des Pols der Geraden $P_2(u_2 v_2)$, so heisst die Gleichung des Pols:

$$ux + vy + 1 = 0 \quad \cdot \quad (6)$$

wobei zwischen x, y und u_2, v_2 die Gleichungen (5) bestehen. Geht nun die Gerade P_2 durch ihren Pol, so ist der letztere der Berührungspunkt von P_2 mit der Kurve und die Koordinaten von P_2 müssen der Gleichung (6) genügen. Setzt man die Werte von u_2 und v_2 in (6) ein, so ergiebt sich als Bedingung dafür, dass P_2 durch ihren Pol geht:

$$\frac{yP(ay + cx + d)}{\delta} + \frac{xP(cy + bx + e)}{\delta} + 1 = 0$$

oder wenn man statt 1 den Wert aus der dritten Gleichung (5) setzt:

$$\frac{yP(ay + cx + d)}{\delta} + \frac{xP(cy + bx + e)}{\delta} + \frac{P(dy + ex + f)}{\delta} = 0$$

oder:

$$Av^2 + Bu^2 + 2Cuv + 2Dv + 2Eu + F = 0.$$

Die Koordinaten u und v einer Tangente der Kurve zweiter Ordnung müssen dieser Gleichung genügen; die letztere ist deshalb die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung in Linienkoordinaten.

Jede Kurve zweiter Ordnung ist auch eine Kurve zweiter Klasse.

Die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung oder eines Kegelschnittes in Linienkoordinaten erhält man, wenn man y und x mit v bez. u vertauscht, und die Koeffizienten durch die Unterdeterminanten der Determinante des Kegelschnittes ersetzt.

22) Es sollen die schon früher gefundenen Gleichungen der Kegelschnitte, nämlich die Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

und die der Hyperbel:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

ebenso die Scheitelgleichungen:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax),$$

und die Gleichung der Parabel:

$$y^2 = 2px,$$

in Linienkoordinaten ausgedrückt werden.

23) Die Polare eines gegebenen Punktes in Bezug auf einen gezeichnet gegebenen Kegelschnitt zu bestimmen.

oder:

$$ay^2 + bx^2 + 2cxy + 2dy + 2ex + f = 0.$$

Die Koordinaten x und y eines Punktes der Kurve zweiter Klasse müssen dieser Gleichung genügen; die letztere ist deshalb die Gleichung der Kurve zweiter Klasse in Punktkoordinaten.

Jede Kurve zweiter Klasse ist auch eine Kurve zweiter Ordnung.

Die Gleichung einer Kurve zweiter Klasse oder eines Kegelschnittes in Punktkoordinaten erhält man, wenn man v und u mit y bez. x vertauscht, und die Koeffizienten durch die Unterdeterminanten der Determinante des Kegelschnittes ersetzt.

Es sollen die schon früher gefundenen Gleichungen der Kegelschnitte, nämlich die Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$a^2u^2 + b^2v^2 = 1,$$

und die der Hyperbel:

$$a^2u^2 - b^2v^2 = 1,$$

ebenso die Scheitelgleichungen:

$$b^2v^2 + 2au = 1,$$

$$b^2v^2 - 2au = -1,$$

und die Gleichung der Parabel:

$$pv^2 = 2u,$$

in Punktkoordinaten ausgedrückt werden.

Den Pol einer gegebenen Geraden in Bezug auf einen gezeichnet gegebenen Kegelschnitt zu bestimmen.

24) Von einem gegebenen Punkte Tangenten an einen gegebenen Kegelschnitt zu ziehen.

Durch einen gegebenen Punkt eines Kegelschnittes die Tangente an denselben zu ziehen.

Polardreiecke.

25) Ist a (Fig. 47) eine beliebige Gerade, α ihr Pol in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt; b eine zweite Gerade, welche durch α geht, so liegt der Pol β dieser letzteren auf a. Die Verbindungslinie c der beiden Punkte α und β ist die Polare des Punktes γ, in welchem a und b sich schneiden. — Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, in welchem nun jeder Eckpunkt der Pol der gegenüberliegenden Seite, jede Seite die Polare des gegenüberliegenden Eckpunktes ist, heisst ein Polardreieck.

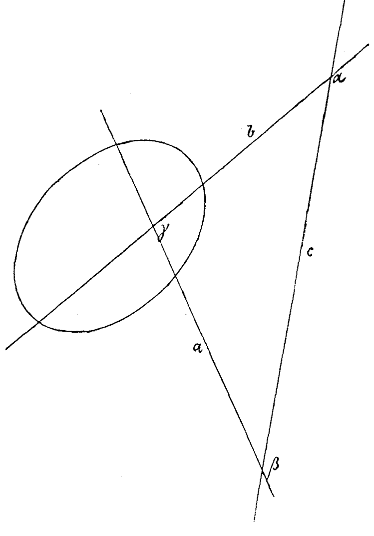


Fig. 47.

Jede durch einen Eckpunkt eines Polardreiecks gehende Gerade trifft den Kegelschnitt in zwei Punkten, welche mit dem Eckpunkt, und dem Schnittpunkt jener Geraden mit der gegenüberliegenden Seite des Polardreiecks vier harmonische Punkte bilden.

Die beiden Tangenten, welche von einem Eckpunkt des Polardreiecks an den Kreis gelegt werden können, bilden mit den durch denselben Eckpunkt gehenden Seiten des Polardreiecks vier harmonische Strahlen. Liegt eine Seite des Polardreiecks, z. B. c (Fig. 48) unendlich fern, so ist γ als Pol der unendlich fernen Geraden die Mitte von DE und FG. — Jede andere Gerade φ, welche durch γ gezogen wird, trifft den Kegelschnitt in zwei Punkten, welche mit γ und dem unendlich fernen Schnittpunkte auf c vier harmonische Punkte bilden; folglich muss γ ebenfalls Mitte zwischen den Schnittpunkten der Geraden φ mit dem Kegelschnitt sein. — Hiernach ist γ

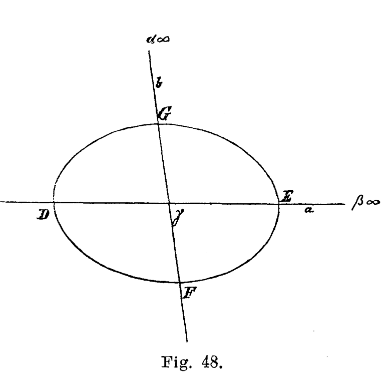


Fig. 48.

der Mittelpunkt des Kegelschnittes. — Zieht man einen Strahl von $\alpha\infty$, so ist derselbe parallel zu b, und der von dem Kegelschnitt begrenzte Abschnitt wird von a halbiert, und umgekehrt halbiert b jede Sehne, welche verlängert nach $\beta\infty$ geht, d. h. parallel mit a ist. Die beiden Sehnen des Polardreiecks, welche durch den Mittelpunkt γ gehen, sind konjugierte Durchmesser. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser parallel.

Der Mittelpunkt.

26) Nach (5) sind die Koordinaten ξ, η des Pols der Geraden P (u, v) gegeben durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{p(Cv + Bu + E)}{\Delta}$$

$$\eta = \frac{p(Av + Cu + D)}{\Delta},$$

wenn zugleich: $$1 = \frac{p(Dv + Eu + F)}{\Delta}$$ ist.

Liegt die Gerade P unendlich fern, so sind u und v gleich Null, und für die Koordinaten des Pols, welcher jetzt der Mittelpunkt des Kegelschnittes ist, erhält man:

$$\xi = \frac{E}{F} = \frac{ae - cd}{c^2 - ab}, \quad \eta = \frac{D}{F} = \frac{bd - ce}{c^2 - ab}.$$

Der Kegelschnitt hat demnach immer einen bestimmten Mittelpunkt, wenn nicht $F = 0$ ist. — Verschwindet F, so liegt der Mittelpunkt unendlich fern (Parabel).

Wird jetzt der Anfangspunkt nach dem Mittelpunkt verlegt, so ist nach (V, 1) zu setzen:

$$\begin{aligned} y &= y' + \eta \\ x &= x' + \xi \end{aligned} \quad \cdot \quad \cdot \quad (7) \qquad \text{wenn} \quad \eta = \frac{D}{F}, \quad \xi = \frac{E}{F}.$$

Betrachtet man ξ und η als die Koordinaten eines beliebigen Punktes, so ergeben sich nach (4) die Koordinaten u und v seiner Polare:

$$\begin{aligned} pv &= a\eta + c\xi + d \\ pu &= c\eta + b\xi + e \\ p &= d\eta + e\xi + f. \end{aligned}$$

Sind nun ξ und η die Koordinaten des Mittelpunktes, so sind u und v gleich Null; für diesen Fall heissen die letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned} a\eta + c\xi + d &= 0 \\ c\eta + b\xi + e &= 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (8) \\ d\eta + e\xi + f &= p = \frac{\Delta}{F} \quad \cdots\cdots\cdot \quad (s.\ 5). \end{aligned}$$

Setzt man hierin die aus (7) folgenden Werte:

$$\eta = y - y', \quad \xi = x - x',$$

ein, so folgt:

$$\begin{aligned} ay + cx + d &= ay' + cx' \\ cy + bx + e &= cy' + bx' \\ dy + ex + f &= dy' + ex' + \frac{\Delta}{F}. \end{aligned}$$

Multipliciert man nun die erste dieser Gleichungen mit der ersten der Gleichungen (7), die zweite mit der zweiten und addiert dieselben alsdann zur dritten Gleichung, so erhält man mit Rücksicht auf Gl. (1)

$$0 = ay'^2 + bx'^2 + 2cx'y' + (a\eta + c\xi + d)\,y' + (c\eta + b\xi + e)\,x' + \frac{\Delta}{F}.$$

Nach (8) sind die Klammerausdrücke gleich Null, folglich heisst die Gleichung des Kegelschnittes in Bezug auf den Mittelpunkt als Anfangspunkt:

$$ay'^2 + bx'^2 + 2cx'y' + \frac{\Delta}{F} = 0 \quad \cdot\ \cdot \quad (9) \quad \cdot\ \cdot \quad (s.\ V,\ 24).$$

Eine weitere Vereinfachung dieser Gleichung lässt sich durch eine Drehung der Achsen um den Anfangspunkt erreichen.

Man setze (V, 10)

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi; \quad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Werden diese Ausdrücke in (9) substituiert, so erhält man:

$$\begin{aligned} & y^2(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi - 2c\sin\varphi\cos\varphi) \\ & + x^2(a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi + 2c\sin\varphi\cos\varphi) \\ & + xy[2c(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - (b - a)\sin 2\varphi] + \frac{\Delta}{F} = 0. \end{aligned}$$

Der Winkel φ lässt sich so bestimmen, dass das Glied mit xy verschwindet. Setzt man nämlich:

$$2c(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - (b - a)\sin 2\varphi = 0,$$

so ergiebt sich hieraus für den gesuchten Wert des Winkels die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2c}{b - a}.$$

Die Gleichung der Kegelschnitte lässt sich somit immer auf die Form:

$$Ax^2 + By^2 + C = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

bringen (vorausgesetzt, dass nicht $\Delta = 0$ ist).

Wenn $c = 0$ und $b = a$ ist, so bleibt φ unbestimmt. Für diesen Fall geht die Gleichung (9) über, in:

$$a^2(x^2 + y^2) + \frac{\Delta}{F} = 0$$

und bedeutet, wenn $\frac{\Delta}{F} < 0$ einen Kreis.

Die Form der Gleichung (10) lässt erkennen, dass dieselbe die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse oder Hyperbel darstellt, wenn nicht $C = \frac{\Delta}{F}$ unendlich, d. h. $F = 0$ ist.

Um zu entscheiden, welcher Kegelschnitt in (10) enthalten ist, ziehe man durch den Mittelpunkt eine Gerade unter dem Winkel α zur X Achse.

Die Länge des Leitstrahls bis an die Kurve sei r, so ist:

$$y = r \sin \alpha, \quad x = r \cos \alpha.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (9) erhält man:

$$ar^2 \sin^2 \alpha + 2cr^2 \sin \alpha \cos \alpha + br^2 \cos^2 \alpha + \frac{\Delta}{F} = 0,$$

oder, wenn man durch r^2 dividiert:

$$a \sin^2 \alpha + 2c \cdot \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha + \frac{\Delta}{Fr^2} = 0.$$

Für $r = \infty$ folgt hieraus:

$$a \sin^2 \alpha + 2c \sin \alpha \cos \alpha + b \cdot \cos^2 \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - ab}}{a} = \frac{-c \pm \sqrt{F}}{a}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man die Richtung der Geraden vom Mittelpunkte nach dem unendlich fernen Punkte des Kegelschnittes, wodurch sich die weiteren Kennzeichen für Ellipse, Hyperbel und Parabel ergeben.

Ist $F > 0$ so giebt es zwei Richtungen (Kennzeichen für die Hyperbel)
„ $F < 0$ „ „ „ keine „ („ „ „ Ellipse)
„ $F = 0$ „ „ „ nur eine Richtung („ „ „ Parabel).

Ist endlich in (9) die Determinante $\Delta = 0$, so hat die Gleichung die Form:

$$ay^2 + bx^2 + 2cxy = 0, \quad \cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

welche sich auch schreiben lässt:

$$(y - mx)(y - nx) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

worin $$m = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - ab}}{a}, \quad n = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - ab}}{a}$$

oder $$m = \frac{-c \pm \sqrt{F}}{a}, \quad n = \frac{-c \mp \sqrt{F}}{a}.$$

Wenn demnach die Determinante $\triangle$ verschwindet, so erhält man, wenn:

$F > 0$ für m und n reelle Werte, und (11) zerfällt in zwei durch den Anfangspunkt gehende Geraden.

$F < 0$, m und n sind imaginär, der Gleichung (11) bez. (12) genügen nur die reellen Werte $x = 0$, $y = 0$; sie stellt demnach einen Punkt dar.

$F = 0$, m und n haben denselben Wert $\frac{c}{a}$; die Gleichung stellt zwei zusammenfallende Geraden dar. —

B. Vermischte Aufgaben über die Kegelschnitte.

1) Den Ort des Schnittpunktes der drei Höhen eines Dreiecks zu finden, von welchem die Grundlinie und zugehörige Höhe gegeben sind.

Antw. Ist a die gegebene Grundlinie, h die Höhe, ein Endpunkt von a der Anfangspunkt, a die Abscissenachse, so findet man als Gleichung des Ortes:

$$x^2 - ax + hy = 0,$$

welche eine Parabel bedeutet.

2) Den Ort des Punktes zu finden, für welchen das Produkt seiner Entfernungen von zwei festen Geraden konstant ist.

Antw. Man findet als Ort eine Hyperbel, deren Asymptoten die festen Geraden sind.

3) Eine Gerade von gegebener Länge bewegt sich mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels α. — Welche Kurve beschreibt ein bestimmter Punkt der Geraden?

Antw. Eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Scheitel des Winkels α ist.

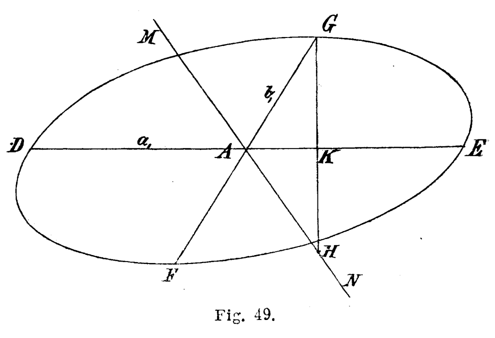


Fig. 49.

4) Sind $AD = a_1$ und $AG = b_1$ (Fig. 49) zwei kon-

jugierte Halbmesser einer Ellipse, und zieht man $GH = a_1$ senkrecht zu DE, und verbindet A mit H durch die Gerade MN, so beschreibt der Endpunkt G der Geraden GH die Ellipse, wenn GH mit den Punkten H und K bez. an MN und DE gleitet. Warum? (Konstruktion von Rodenberg.)

Man stelle die Gleichung der Kurve in Bezug auf die beiden konjugierten Durchmesser DE und FG als Koordinatenachsen auf.

5) Eine Gerade bewegt sich so, dass das Produkt ihrer Abstände von zwei gegebenen festen Punkten konstant ist. — Welche Kurve wird von ihr eingehüllt? (Anwendung der Linienkoordinaten.)

Antw. Man erhält eine Ellipse oder eine Hyperbel.

6) Die Einhüllende der Geraden zu finden, für welche die Summe der Quadrate ihrer senkrechten Abstände von zwei gegebenen festen Punkten konstant ist. (Linienkoordinaten.) Man findet eine Ellipse oder Hyperbel. (Untersuche die speciellen Fälle.)

7) Welche Kurve wird von der Geraden eingehüllt, bei welcher die Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen festen Punkten konstant ist? (Linienkoordinaten.)

Antw. Man findet eine Parabel.

8) Den Ort des Mittelpunktes eines Kreises zu finden, welcher auf den beiden Koordinatenachsen die gegebenen Abschnitte 2a und 2b macht.

Antw. Man findet eine gleichseitige Hyperbel, deren Achsen $= \sqrt{a^2 - b^2}$ sind.

9) Ein Dreieck ABC gleitet mit den beiden Eckpunkten A und B auf der Abscissen- bez. Ordinatenachse. — Welche Kurve beschreibt der dritte Eckpunkt C?

Antw. Ist $BC = a$, $AC = b$, $\angle ACB = \gamma$, so findet man als Gleichung der gesuchten Kurve:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \sin\gamma - \cos^2\gamma = 0,$$

welche eine Ellipse bedeutet, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist. Für $\gamma = 90°$ geht dieselbe in die Gerade $bx - ay = 0$ über.

10) Die Koordinaten des Mittelpunktes des Kegelschnittes:

$$y^2 + 4x^2 + 2xy - 8x + 12y - 2 = 0$$

zu finden.

Antw. $+\frac{10}{3}, \quad -\frac{28}{3}.$

Anwendung der abgekürzten Bezeichnung.

11) Die linke Seite der Gleichung eines Kegelschnittes:

$$ay^2 + bx^2 + 2cxy + 2dy + 2ex + f = 0$$

werde zur Abkürzung mit einem Buchstaben, z. B. K, bezeichnet.

Sind nun:

$$K_1 = 0 \quad \text{und} \quad K_2 = 0$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte, so bedeutet die Gleichung:

$$K_1 + kK_2 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

die Gleichung eines neuen Kegelschnittes, welcher durch die Schnittpunkte der beiden gegebenen Kegelschnitte geht. — Die Auflösung der Gleichungen $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$, welche beide vom zweiten Grade in x und y sind, giebt vier Paare von Werten für die Koordinaten des Durchschnittes, d. h. zwei Kegelschnitte haben im allgemeinen vier Schnittpunkte; dieselben brauchen jedoch nicht sämtlich reell zu sein. —

12) Wenn K_1 in ein Produkt aus zwei linearen Faktoren G_1 und H_1 zerfällt, so bedeutet $K_1 = 0$ zwei gerade Linien, deren Gleichungen:

$$G_1 = 0, \quad H_1 = 0$$

sind, und der Kegelschnitt:

$$K_1 + kK_2 = 0 \text{ oder } G_1 H_1 + kK_2 = 0$$

geht durch die Punkte, in welchen die Geraden G_1 und H_1 den Kegelschnitt K_2 treffen.

13) Ist noch K_2 dem Produkt zweier linearen Faktoren G_2 und H_2

11) Die linke Seite der Gleichung eines Kegelschnittes:

$$Av^2 + Bu^2 + 2Cuv + 2Dv + 2Eu + F = 0$$

werde zur Abkürzung mit einem Buchstaben, z. B. U, bezeichnet.

Sind nun:

$$U_1 = 0 \quad \text{und} \quad U_2 = 0$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte, so bedeutet die Gleichung:

$$U_1 + kU_2 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

die Gleichung eines neuen Kegelschnittes, welcher die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Kegelschnitte berührt. Die Auflösung der Gleichungen $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$, welche beide vom zweiten Grade in u und v sind, giebt vier Paare von Werten für die Koordinaten der gemeinschaftlichen Tangenten, d. h. zwei Kegelschnitte haben im allgemeinen vier Tangenten gemeinschaftlich; dieselben brauchen jedoch nicht sämtlich reell zu sein.

12) Wenn U_1 in ein Produkt aus zwei linearen Faktoren P_1 und Q_1 zerfällt, so bedeutet $U_1 = 0$ zwei Punkte, deren Gleichungen:

$$P_1 = 0, \quad Q_1 = 0$$

sind, und der Kegelschnitt:

$$U_1 + kU_2 = 0 \text{ oder } P_1 Q_1 + kU_2 = 0$$

berührt die Tangenten, welche von diesen Punkten an den Kegelschnitt U_2 gezogen werden können.

13) Ist noch U_2 dem Produkt zweier linearen Faktoren P_2 und Q_2

gleich, so ist:

$$G_1 H_1 + k G_2 H_2 = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher durch die 4 Schnittpunkte des Linienpaares $G_1 = 0$, $H_1 = 0$ mit dem Linienpaar $G_2 = 0$, $H_2 = 0$ geht.

14) Der Kegelschnitt:

$$K_1 + k G_2 H_2 = 0$$

geht durch die Punkte, in welchen die Geraden G_2 und H_2 den Kegelschnitt K_1 treffen. — Fallen G_2 und H_2 zusammen, so heisst diese Gleichung:

$$K_1 + k G_2{}^2 = 0 \quad \cdot \quad (\alpha)$$

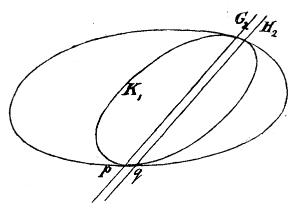


Fig. 50.

Da nun dieser Kegelschnitt zwei Paare zusammenfallender Punkte mit dem ersten gemeinschaftlich hat, so berührt derselbe den Kegelschnitt K_1 zweimal. Fig. 50.

15) Fallen in 13) die Geraden G_2 und H_2 zusammen, so heisst die Gleichung des Kegelschnittes:

$$G_1 H_1 + k G_2{}^2 = 0.$$

Die Punkte, in welchen G_1 die beiden Geraden G_2 und H_2 traf, fallen zusammen; folglich ist G_1 eine Tangente dieses Kegelschnittes; ebenso H_1. — Die Berührungspunkte sind die Schnittpunkte von G_1 und H_1 mit G_2.

gleich, so ist:

$$P_1 Q_1 + k P_2 Q_2 = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher die 4 Verbindungslinien der Punkte P_1, P_2; P_1, Q_2; P_2, Q_1 und Q_1, Q_2 berührt.

14) Der Kegelschnitt:

$$U_1 + k P_2 Q_2 = 0$$

berührt die Tangenten, welche sich von den Punkten P_2 und Q_2 an U_1 ziehen lassen. — Fallen P_2 und Q_2 zusammen, so heisst obige Gleichung:

$$U_1 + k P_2{}^2 = 0 \quad \cdot \quad (\alpha)$$

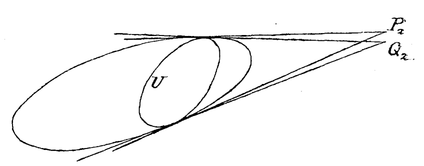


Fig 51.

Da nun dieser Kegelschnitt zwei Paare zusammenfallender Tangenten mit dem ersten gemeinschaftlich hat, so berührt derselbe den Kegelschnitt U_1 zweimal. Fig. 51.

15) Fallen in 13) die Punkte P_2 und Q_2 zusammen, so heisst die Gleichung des Kegelschnittes:

$$P_1 Q_1 + k P_2{}^2 = 0.$$

Die Geraden, welche P_1 mit P_2 und Q_2 verbinden, fallen zusammen; folglich ist $P_1 P_2$ eine Tangente dieses Kegelschnittes; ebenso die Gerade $Q_1 P_2$. — Die Berührungspunkte sind P_1 und Q_1.

16) Die Gleichung des Kegelschnittes zu finden, welcher durch die 5 Punkte M_1 (2, 4), M_2 (8, 6), M_3 (12, 2), M_4 (6, —4), M_5 (2, —2) geht. (s. 13.)

Antw. $25x^2 + 30y^2 - xy - 58y - 324x + 308 = 0.$

16) Die Gleichung des Kegelschnittes zu finden, welcher die 5 Geraden $G_1\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $G_2\left(0, -\frac{1}{8}\right)$, $G_3\left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{16}\right)$, $G_4\left(-\frac{1}{12}, 0\right)$, $G_5\left(0, \frac{1}{2}\right)$ berührt. (s. 13.)

Antw. $32v^2 - 48u^2 - 112uv - 12v - 28u - 2 - 0.$

17) Die Gleichung des Kegelschnittes zu finden, welcher die beiden Geraden:

$$45y + 32x - 600 = 0$$
$$5y + 2x + 50 = 0$$

in Punkten berührt, deren Abscissen 12, bez. — 9 sind, und welcher ausserdem durch den Punkt $M\left(9, 6\frac{2}{5}\right)$ geht.

Antw. Man findet: $225y^2 + 64x^2 = 14400,$

welches die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse ist.

18) Gegeben die drei Punkte P_1 (36, 24), P_2 (16, —16), P_3 (—24, 4). Man soll die Gleichung des Kegelschnittes finden, welcher die beiden Geraden P_1P_3 und P_2P_3 in den Punkten P_1 bez. P_2 und ausserdem die Gerade $y - x - 4 = 0$ berührt.

Antw. $4v^2 - u = 0$ (Parabel).

19) Die Gleichung des Kegelschnittes zu finden, welcher durch die vier Schnittpunkte des Kreises $x^2 + y^2 - 16 = 0$ mit den Achsen, und ausserdem durch den Punkt M (8, 12) geht.

Antw. $x^2 + y^2 - 2xy - 16 = 0$. Der Kegelschnitt zerfällt also in zwei parallele gerade Linien:

$$x - y + 4 = 0, \text{ und } x - y - 4 = 0.$$

20) Wie heisst die Gleichung der Tangente, welche den Kegelschnitt

$$ay^2 + bx^2 + 2cxy + 2dy + 2ex + f = 0$$

im Punkte $M(x_1 y_1)$ berührt?

Antw.

$$(ay_1 + cx_1 + d)\,y + (bx_1 + cy_1 + e)\,x + dy_1 + ex_1 + f = 0.$$

21) Nimmt man in der Gleichung:

$$ay^2 + bx^2 + 2cxy + 2dy + 2ex + f = 0, \quad \cdot \cdot \cdot \quad (\alpha)$$

den Koeffizient a veränderlich, alle übrigen Koeffizienten aber als konstant an, so entspricht jedem Wert von a, welcher in die Gleichung eingesetzt wird, ein neuer Kegelschnitt. — Alle diese unzählig vielen Kegelschnitte gehen durch dieselben beiden Punkte der Abscissenachse; denn die Abscissen dieser Punkte ergeben sich ($y = 0$ gesetzt) aus der Gleichung: $bx^2 + 2ex + f = 0,$

welche a nicht enthält. Sind nun $x = x_1$ oder x_2 und $y = 0$ die Koordinaten der beiden Schnittpunkte, so erhält man durch Einsetzen derselben in die Gleichung der Tangente (s. 20) an die Stelle von x_1 und y_1:

$$(cx_1 + d)\,y + (bx_1 + e)\,x + ex_1 + f = 0,$$

und

$$(cx_2 + d)\,y + (bx_2 + e)\,x + ex_2 + f = 0.$$

Dies sind die Gleichungen der Tangenten in jenen beiden Schnittpunkten. Da dieselben unabhängig von a sind, so haben alle Kegelschnitte diese beiden Tangenten gemeinschaftlich, d. h. sie berühren sich in den beiden Punkten der Abscissenachse.

Anmerkung. Diese Punkte können reell oder imaginär sein.

22) Beweise ebenso folgende Sätze.

Wenn b veränderlich, die übrigen Koeffizienten aber konstant sind, so bedeutet die Gleichung (α) in 21) eine Schar von Kegelschnitten, welche sich in denselben beiden Punkten der Ordinatenachse berühren.

Betrachtet man c als veränderlich, die übrigen Koeffizienten aber als konstant, so bedeutet (α) eine Schar von Kegelschnitten, welche sich sämtlich in 2 Punkten der Abscissenachse und in 2 Punkten der Ordinatenachse schneiden.

23) Konfokale Kegelschnitte sind solche, welche die Brennpunkte gemeinschaftlich haben. —

Eine Ellipse wird von einer zu ihr konfokalen Hyperbel rechtwinklig geschnitten. — Beweis leicht mit Hülfe der früher gezeigten Tangentenkonstruktionen.

24) Den Ort des Poles einer gegebenen Geraden in Bezug auf eine Schar konfokaler Kegelschnitte zu finden.

Antw. Man erhält eine Gerade, welche zu der gegebenen Geraden senkrecht steht.

25) Nach Formel (9) in (A, 26) d. Abschn. ist die Gleichung eines Kegelschnittes in Bezug auf den Mittelpunkt als Anfangspunkt:

$$ay^2 + bx^2 + 2cxy + \frac{\Delta}{F} = 0.$$

Um die Gleichung in Bezug auf die Hauptachsen zu erhalten, setze man:

$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi, \quad x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$

dann ist die Gleichung der Kurve in Bezug auf die um den Winkel φ gedrehten Achsen:

$$a\,(x \sin\varphi + y \cos\varphi)^2 + b\,(x \cos\varphi - y \sin\varphi)^2$$
$$+ 2c\,(x \sin\varphi + y \cos\varphi)\,(x \cos\varphi - y \sin\varphi) + \frac{\Delta}{F} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich der Koeffizient von y^2:

$$a' = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi - 2c\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$
$$= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\varphi - c\sin 2\varphi;$$

ferner, der Koeffizient von x^2:

$$b' = a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi + 2c\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\cos 2\varphi + c\sin 2\varphi,$$

und der Koeffizient von xy:

$$2c' = 2a\sin\varphi\cos\varphi - 2b\sin\varphi\cos\varphi + 2c(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

oder: $$c' = \frac{(a-b)}{2}\sin 2\varphi + c\cdot\cos 2\varphi.$$

Leicht findet man aus diesen Beziehungen:

$$a' + b' = a + b,$$
$$c'^2 - a'b' = c^2 - ab.$$

Durch Drehung der Achsen um den Mittelpunkt werden demnach die Grössen $a + b$ und $c^2 - ab$ nicht geändert. —

Soll nun die neue Gleichung in die Mittelpunktsgleichung übergehen, so muss $c' = 0$ werden. Zur Bestimmung von a' und b' erhält man demnach die beiden Gleichungen:

$$a' + b' = a + b, \quad a'b' = ab - c^2.$$

26) Welchen Kegelschnitt enthält die Gleichung:

$$18y^2 + 12x^2 - 8xy - 80 = 0$$

und wie gross sind die Achsen?

Antw. Die Mittelpunktsgleichung des Kegelschnittes ist:

$$2y^2 + x^2 = 8,$$

aus welcher sich die Achsen $a = \sqrt{8}$, $b = 2$ ergeben. (Ellipse.)

27) Ebenso wenn die Gleichung $10y^2 + 4x^2 + 8xy - 64 = 0$ gegeben ist.

Antw. Die Gleichung bedeutet eine Ellipse, deren Achsen $\sqrt{32}$ und $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ sind.

28) Die Gleichung eines Kegelschnittes sei $24y^2 - 11x^2 + 84xy - 624 = 0$. Wie heisst die Gleichung desselben in Bezug auf die Hauptachsen, und wie gross sind die letzteren?

Antw. Man findet als Gleichung: $4y^2 - 3x^2 = 48$, welche eine Hyperbel bedeutet, deren Achsen: 4 und $2\sqrt{3}$ sind.

29) Die Koordinaten des Mittelpunktes und die Achsen des Kegelschnittes: $y^2 + 2x^2 + 6xy + y - 4x - 8 = 0$ zu finden.

Antw. Die Gleichung bedeutet eine Hyperbel. Koordinaten des Mittelpunktes: $(-\frac{1}{2}, 1)$; die Achsen sind: 3,36.. und 3,15..

30) Den Ort des Scheitels eines gegebenen Winkels φ zu finden, dessen Schenkel die Parabel $y^2 = 2px$ berühren.

Antw. $4y^2 - 4x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 4px(2 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = p^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$, welche Gleichung eine Hyperbel bedeutet. (Mit Hülfe von IV. B, 59 zu lösen.)

31) Zwei Winkel α und β drehen sich um ihre Scheitel A und B. Der Schnittpunkt des einen Paares ihrer Schenkel durchläuft eine Gerade G. Es soll bewiesen werden, dass der Schnittpunkt des andern Paares einen Kegelschnitt beschreibt, welcher durch A und B geht. (Newton.)

32) Die Seiten eines Dreiecks gehen durch drei feste Punkte P_1, P_2 und P_3. — Zwei Eckpunkte des Dreiecks bewegen sich auf gegebenen Geraden G_1 und G_2. — Man soll beweisen, dass der dritte Eckpunkt des veränderlichen Dreiecks einen Kegelschnitt durchläuft, welcher durch P_1, P_2 und P_3 geht. (Mac-Laurin.)

(Beweis für 31 und 32 nach VI. A, 1.)

33) Der Ort des Schnittpunktes der beiden Normalen, welche durch die Endpunkte einer Brennpunktssehne gezogen werden, ist eine Ellipse.

34) Legt man durch die beiden Endpunkte der einen Diagonale eines Rechtecks Kreise, und zieht in jedem der letzteren denjenigen Durchmesser, welcher der anderen Diagonale des Rechtecks parallel ist, so liegen die Endpunkte dieser Durchmesser auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche durch die Eckpunkte des Rechtecks geht.

VII. Abschnitt.

A. Kurven höherer Ordnung.

1) Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer beliebigen Kurve. — Zur Untersuchung der Gestalt derselben bildet man den ersten und zweiten Differentialquotient von y nach x:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

Ist die Gleichung in der unentwickelten Form $F(x, y) = 0$ gegeben,

so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die Tangente in einem beliebigen Punkte M (x, y) der Kurve mit der Abscissenachse bildet, durch α, so ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$. — Die Kurve steigt oder fällt (d. h. y nimmt zu oder ab mit wachsendem x) so lange $\frac{dy}{dx}$ positiv bez. negativ ist. — Für $\frac{dy}{dx} = 0$ erreicht y einen grössten Wert (Maximum), wenn zugleich $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$; und einen kleinsten Wert (Minimum), wenn zugleich $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ist. — Wird aber der zweite Differentialquotient gleichzeitig mit dem ersten zu Null, so sind die folgenden Differentialquotienten zu untersuchen. — Ein Maximum oder Minimum tritt für y nur dann ein, wenn der erste nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist.

Die Art der Krümmung einer Kurve erkennt man aus dem Verhalten des zweiten Differentialquotienten. So lange $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ist, kehrt die Kurve die erhabene (konvexe) Seite gegen die Abscissenachse, und wenn $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ist, die hohle (konkave) Seite. — Wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist und beim Durchgang durch Null sein Vorzeichen wechselt $\left(\text{d. h. wenn zugleich } \frac{d^3y}{dx^3} \gtrless 0\right)$, so findet ein Wechsel der Krümmung statt. — Der Punkt, in welchem dies geschieht, heisst ein Wendepunkt (Inflexionspunkt), und die Tangente in demselben wird eine Wendetangente genannt. — Grösste oder kleinste Werte von x kann man mit Hülfe der Gleichung $\frac{dx}{dy} = 0$ bestimmen.

Die Kurve $F(xy) = 0$ hat einen vielfachen Punkt, wenn zu einem bestimmten Wert von x mehrere gleiche Werte von y gehören. Durch Einsetzen dieses Wertes von x in die Gleichung der Kurve erhält man dann eine Gleichung für y, welche mehrere gleiche Wurzeln haben muss, woraus folgt, dass in diesem Falle $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ist. — Durch Vertauschung der Koordinatenachsen findet man, dass ebenso auch $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ sein muss, woraus sich ergiebt, dass der erste Differentialquotient von y nach x unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint. — Die oben angegebene Bedingung $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ bez. $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ setzt voraus, dass die Gleichung der Kurve eine algebraische Gleichung in rationaler Form ist. —

Der Krümmungshalbmesser ρ im Punkte (x, y) der Kurve, und die Koordinaten α und β des Krümmungsmittelpunktes ergeben sich aus den Formeln:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \beta - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x - \alpha = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

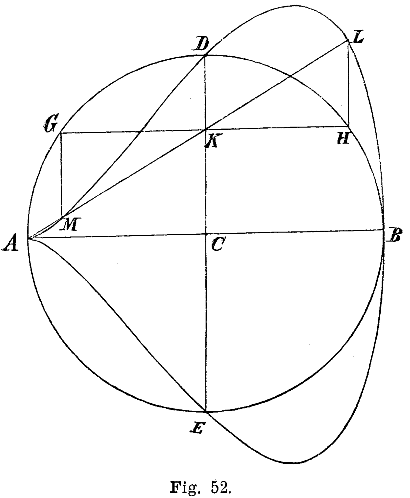


Fig. 52.

2) AB und DE (Fig. 52) seien zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser eines Kreises vom Halbmesser r. — Man ziehe die Sehne GH parallel zu AB, und errichte in den Endpunkten G und H die Senkrechten GM und HL zu AB. — Ein von A aus durch den Schnittpunkt K gezogener Strahl schneidet GM und HL in zwei Punkten M und L einer Kurve. — Wie heisst die Gleichung dieser Kurve, wenn A der Anfangspunkt und AB die Abscissenachse ist?

Antw. $y = \frac{x}{r}\sqrt{2rx - x^2}$, oder $r^2y^2 = 2rx^3 - x^4$.

Beweise, dass die Kurve symmetrisch in Bezug auf die X Achse ist. Ferner: die Kurve berührt die Abscissenachse in A, und schneidet dieselbe in B unter rechtem Winkel. y ist am grössten für $x = \frac{3}{2}r$. — Die Kurve hat zwei Wendepunkte, deren Koordinaten sind: $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} r$ und $y = \pm \frac{r}{2}\sqrt{6\sqrt{\ } - 9}$.

3) Wie heisst die Polargleichung der vorigen Kurve, wenn A der Pol, und der feste Schenkel des veränderlichen Winkels φ die Abscissenachse ist?

Antw. $\rho = \frac{r}{\cos^2 \varphi}[\cos \varphi \pm \sqrt{\cos 2\varphi}]$.

Man zeige noch, dass die Geraden von A nach D und E die Kurve in diesen letzteren Punkten berühren.

4) Cissoide. AB (Fig. 53) ist der Durchmesser eines Kreises vom Halbmesser a, CD ist die Tangente im Punkte B. — Zieht man von A aus den Strahl AE beliebig bis an CD und macht man PE = AF, so ist P ein Punkt der Cissoide. — Wie heisst die Gleichung derselben, wenn A der Anfangspunkt und AB Abscissenachse ist?

Antw. $y^2(2a - x) - x^3 = 0$.

Man zeige, dass CD eine Asymptote ist, und dass die Kurve die Abscissenachse im Anfangspunkte berührt.

5) Wie heisst die Polargleichung der Cissoide, wenn A der Pol, AB die feste Achse ist?

Antw. $r = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.

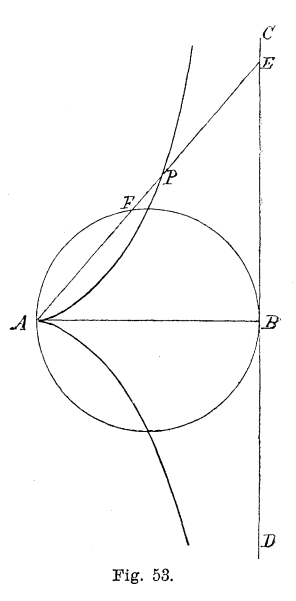


Fig. 53.

6) Der eine Schenkel eines rechten Winkels hat die Länge a; der andere Schenkel ist unbegrenzt. — Der letztere geht stets durch einen festen Punkt A, und der Endpunkt des begrenzten Schenkels gleitet an einer festen Geraden, welche von A den Abstand a hat. — Welche Kurve beschreibt der Scheitel des Winkels?

Antw. Man findet eine Cissoide.

Die Cassinische Linie.

7) Den Ort des Punktes zu finden, für welchen das Produkt seiner Entfernungen von zwei gegebenen festen Punkten B und C gleich k^2 ist.

Antw. Ist $2a$ die Entfernung der Punkte B und C, ihre Verbindungslinie die Abscissenachse und die Mitte zwischen beiden der Anfangspunkt, so findet man als Gleichung des Ortes:

$$(y^2 + x^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = k^4 - a^4.$$

Die Kurve kann verschiedene Formen annehmen, welche von dem Verhältnis $\frac{a}{k}$ abhängen (Fig. 54). — Für $\frac{a}{k} = 0$ geht sie in einen Kreis über. — Ist aber $\frac{a}{k} \leqq \sqrt{\frac{1}{2}}$, so ähnelt sie der Ellipse (α); ferner zeige man, dass für $\sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{a}{k} < 1$ die Kurve an den Stellen, wo sie die Ordinatenachse schneidet, eingedrückt erscheint (β), und für $\frac{k}{a} = 1$, wo $k^4 - a^4 = 0$ ist, eine schleifenförmige Gestalt (γ) erhält. In dem letzteren Falle wird die Kurve eine Lemniskate genannt. Die beiden Tangenten an die durch den Anfangspunkt gehenden Zweige stehen senkrecht aufeinander. — Wird $\frac{k}{a}$ grösser als 1, so zerfällt sie in zwei getrennte Kurven (δ), welche die gegebenen Punkte B und C einschliessen. —

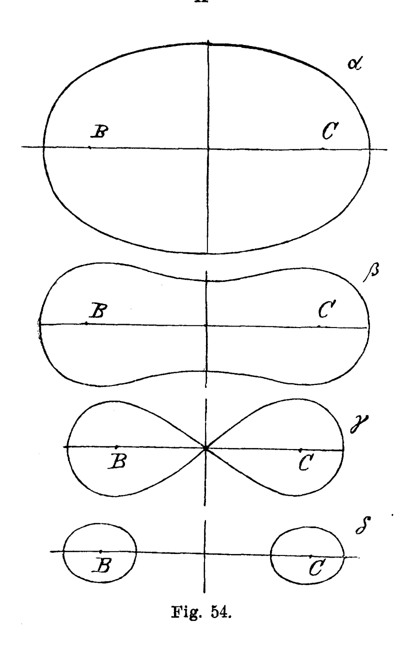


Fig. 54.

8) Wie heissen die Polargleichungen der Cassinischen Linie und der Lemniskate? Der Pol liege im Mittelpunkt.

Antw. $r^4 - 2a^2r^2 \cos 2\varphi = k^4 - a^4$ und $r = a\sqrt{2 \cos 2\varphi}$.

9) Die Gestalt der Kurve folgender Gleichung:

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

anzugeben. —

Man findet: für $x = 0$ ist y ein Maximum. — Die Kurve schneidet die Ordinatenachse rechtwinklig und berührt die Abscissenachse

in unendlicher Entfernung. Sie hat zwei Wendepunkte, deren Koordinaten sind: $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{3}{4})$ und $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{3}{4})$.

10) Ebenso die Gestalten folgender Kurven näher zu bestimmen.

a) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$

b) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

c) $y = \sqrt{x^3 + 4x^2}$

d) $y = \sqrt{x^5 + 4x^4}$

e) $(y - x^2)^2 = x^3$

f) $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

g) $y^2 = (1 - \frac{1}{2}x^2)^3$.

Antw. a) Die Kurve berührt die Abscissenachse im Anfangspunkt. Sie hat zwei Wendepunkte mit den Koordinaten $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4})$, $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4})$. Eine zur Abscissenachse parallele Gerade im Abstand 1 von der ersteren ist Asymptote der Kurve.

b) Die Kurve geht durch den Anfangspunkt und schneidet die Abscissenachse unter einem Winkel von 45°. — Sie hat drei Wendepunkte, nämlich den Anfangspunkt der Koordinaten, und zwei andere mit den Koordinaten $(\sqrt{3}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3})$. y wird für $x = 1$ ein Maximum und für $x = -1$ ein Minimum.

c) Der Anfangspunkt ist ein Doppelpunkt. Die beiden Zweige sind symmetrisch gegen die X Achse und treffen dieselbe im Anfangspunkt jede unter einem Winkel, dessen trig. Tangente $= 2$ ist. — Nach der positiven Seite erstreckt sich die Kurve ins Unendliche, auf der negativen Seite schneidet sie die X Achse im Abstand -4 vom Anfangspunkt unter rechtem Winkel. y hat ein Maximum für $x = -2\frac{2}{3}$.

d) Die Kurve berührt die Abscissenachse im Anfangspunkt und erstreckt sich auf der positiven Seite oberhalb und unterhalb der Abscissenachse ins Unendliche. Sie schneidet die Abscissenachse im Abstande -4 unter rechtem Winkel, und hat zwei Wendepunkte, deren gemeinschaftliche Abscisse $= \frac{-48 + 8\sqrt{6}}{15}$ ist; y ist ein Maximum, für $x = -3\frac{1}{5}$.

e) Die Kurve besteht aus zwei vom Anfangspunkt nach der positiven Seite der Abscissenachse aus gehenden unendlichen Zweigen. — Beide berühren im Anfangspunkt die XAchse. Der obere Zweig kehrt nur die erhabene Seite, der untere anfänglich die hohle Seite, dann von dem Wendepunkt $(\frac{9}{64}, -\frac{135}{4096})$ an, ebenfalls die erhabene Seite gegen die Abscissenachse. — Beim unteren Zweig ist im Punkte $(\frac{9}{16}, -\frac{27}{256})$ die Tangente parallel zur X Achse. —

11) Auf dem Durchmesser AB (Fig. 55) eines Kreises vom Halbmesser r ist ein Punkt C gegeben. Von einem Punkte D des Umfanges fälle man das Lot DE auf AB, und ziehe CM parallel zu AD. — Welches ist der Ort des Punktes M?

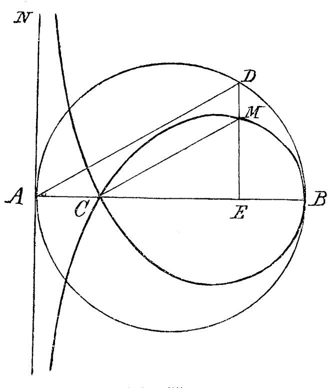


Fig. 55.

Antw. Für A als Anfangspunkt, AB als Abscissenachse und $AC = a$ findet man als Gleichung des Ortes:

$$y = \frac{x - a}{x} \sqrt{2rx - x^2}.$$

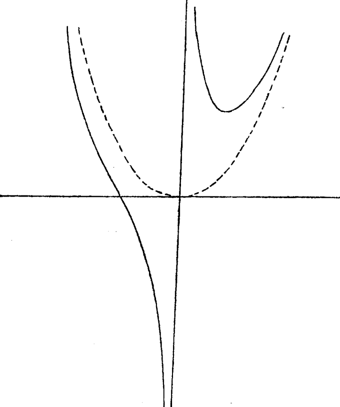
Die Gleichung soll diskutiert werden.

12) Man soll die Gestalt der Kurve: $a^3y^3 + b^3x^3 = a^3b^3$ näher bestimmen.

Antw. Die Kurve schneidet die Abscissenachse im Abstand $+ a$, und die Ordinatenachse in der Entfernung $+ b$ vom Anfangspunkt. — Diese beiden Schnittpunkte sind zugleich Wendepunkte der Kurve, welche hier die Achsen rechtwinklig durchschneidet. Durch den Anfangspunkt geht eine Asymptote, sie bildet mit der X Achse einen Winkel α, dessen trigonometrische Tangente $= -\frac{b}{a}$ ist. —

13) Lässt sich y in eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, so können die ersten Glieder positive und die folgenden negative Exponenten haben. — Ist z. B.:

$$y = x^2 + \frac{1}{x}$$


Fig. 56.

ein derartiger Fall, so wird di urve die in Fig. 56 dargestellte Forr iben. Wird $x = \infty$, so ist $\frac{1}{x} = 0$. — Betrachtet man demnach diejenige Kurve, deren Gleichung

$$y = x^2,$$

auf der rechten Seite nur das Glied mit dem positiven Exponenten enthält, so findet man, dass dieselbe mit wachsendem x sich der gegebenen Kurve immer mehr nähert, und im Unendlichen mit ihr zusammentrifft. —

Sie ist also gleichsam eine gekrümmte Asymptote der ersten Kurve. In Fig. 56 ist dieselbe punktiert angegeben.

14) Die Kurve $y^2 = (4x^2 - 1)^3$ hat eine gekrümmte Asymptote. — Wie heisst die Gleichung derselben?

Antw. $y = 8x^3 - 3x$.

Man bestimme die Gestalt der gegebenen Kurve und die ihrer gekrümmten Asymptote.

15) Dieselbe Aufgabe, wenn die Gleichung der gegebenen Kurve $xy = x + 1$ ist.

16) Ebenso, wenn $y^2 = (x^4 - 4x)$ die Gleichung der gegebenen Kurve ist.

Antw. Man findet als Gleichung der Kurve, welche sich der gegebenen asymptotisch nähert, die Parabel $y = x^2$.

17) Die Gleichung $(y - x)^2 = (1 - x^2)^3$ zu diskutieren.

Entwickelt man die Gleichung, so findet man:

$$y^2 - 2xy + 4x^2 - 3x^4 + x^6 - 1 = 0$$

und hieraus:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x + 6x^3 - 3x^5}{y - x}.$$

Um zu untersuchen, ob die Kurve vielfache Punkte hat, setze man Zähler und Nenner dieses Buches gleich Null. Dies giebt die Gleichungen:

$$y - 4x + 6x^3 - 3x^5 = 0$$
$$y - x = 0.$$

Setzt man also in der ersten dieser Gleichungen $y = x$, so folgt: $-3x + 6x^3 - 3x^5 = 0$, woraus sich ergiebt $x = \pm 1$; ebenso ist dann $y = \pm 1$.

Werden diese Werte von x und y in die Gleichung der Kurve eingesetzt, so zeigt sich, dass sie derselben wirklich genügen. — Demnach hat die Kurve zwei vielfache Punkte A (1, 1) und B (— 1, — 1). Fig. 57.

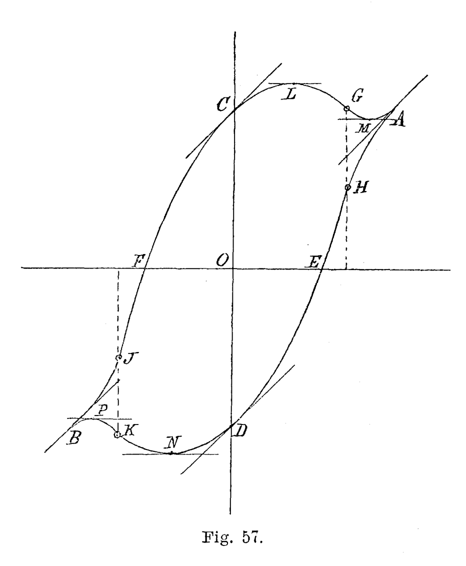


Fig. 57.

Aus der gegebenen Gleichung der Kurve findet man, wenn man y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ als Funktionen von x allein bestimmt:

$$y = x \pm \sqrt{(1-x^2)^3},$$
$$\frac{dy}{dx} = 1 \mp 3x\sqrt{1-x^2},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{3(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ist nun $x = \pm 1$, so erhält man $\frac{dy}{dx} = 1$, d. h. die Tangenten in A und B sind unter 45° gegen die Abscissenachse geneigt (sie bilden, wie sich aus der Lage von A und B ergiebt, eine Gerade). Für den oberen Zweig ist $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ so lange $2x^2 > 1$, und wird in A gleich $+\infty$; für den unteren Zweig ist $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ so lange $2x^2 < 1$ und wird in $B = -\infty$. Die beiden Zweige berühren die Tangente in A auf verschiedenen Seiten, und da x nicht grösser als 1 werden darf, so ist A ein Rückkehrpunkt. Dasselbe gilt für den Punkt B. — Setzt man $x = 0$ dann findet man $y = \pm 1$ und $\frac{dy}{dx} = 1$. Die Kurve schneidet die Ordinatenachse in den Abständen ± 1 vom Anfangspunkt, und die Tangenten in diesen beiden Punkten C und D sind unter 45° gegen die Abscissenachse geneigt. Für C ist $\frac{d^2y}{dx^2} = -3$ und für $D = +3$ woraus folgt, dass in C die hohle Seite gegen die Abscissenachse gekehrt ist. — Setzt man $y = 0$, so ergiebt sich $x = \pm 0{,}564\ldots$ Hierdurch erhält man die beiden Punkte E und F auf der Abscissenachse. Der zweite Differentialquotient wird Null, wenn $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. Man sieht auch sofort, dass derselbe beim Durchgang durch Null sein Vorzeichen wechselt; die Kurve hat demnach Wendepunkte. Setzt man $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$ in die Gleichung der Kurve ein, so erhält man $y = \sqrt{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$, woraus sich die beiden Wendepunkte G und H ergeben, denen für $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ die Punkte J und K entsprechen. — Endlich findet man noch für y zwei Maxima und zwei Minima, wenn $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{5}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{5} \pm 1)$ ist. In diesen Punkten L, M, N, P sind die Tangenten parallel zur Abscissenachse.

18) Die Gleichung $(x^2-1)^2 = y^2(2y+3)$ soll untersucht werden. Fig. 58.

Antw. Man findet einen Doppelpunkt A für $x = 0$, $y = -1$, $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$. Zwei andere Doppelpunkte B und C, welche in den Abständen $+1$ und -1 vom Anfangspunkt liegen. Für diese Punkte ist $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$. y hat für $x = 0$ das Maximum $\frac{1}{2}$ (Punkt D) und für $x = \pm 1$ das Minimum $-\frac{3}{2}$ (Punkte E und F). Für $y = -1$ ergiebt sich ein Maximum von $x = \pm \sqrt{2}$. In den entsprechenden Punkten G und H sind die Tangenten parallel zur Ordinatenachse. — Oberhalb der Abscissenachse erstrecken sich symmetrisch zur Ordinatenachse zwei Zweige ins Unendliche. — Wendepunkte hat diese Kurve nicht.

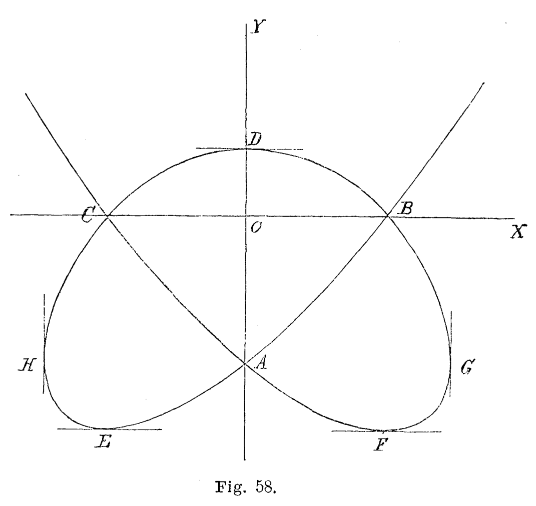


Fig. 58.

19) $y^2 - 2x^2y - x^5 = 0$. Die Kurve berührt die Abscissenachse im Anfangspunkt mit zwei Zweigen. Der obere geht mit konvexer Krümmung auf der positiven Seite der Abscissenachse ins Unendliche, der untere mit konkaver Krümmung ebenfalls, unterhalb der Abscissenachse. — Auf der negativen Seite kann x höchstens gleich -1 werden. Dann ist $y = +1$ und $\frac{dy}{dx} = \infty$. In diesem Punkte steht die Tangente senkrecht zur Abscissenachse. Für $x = -\frac{24}{25}$ ist wieder $\frac{dy}{dx} = 0$, in diesem Punkte hat y ein Maximum, die Tangente in demselben ist parallel zur Abscissenachse. — Der Anfangspunkt ist für den unteren Zweig ein Wendepunkt. Ein zweiter Wendepunkt liegt auf der negativen Seite im oberen Teil der Kurve. Man bestimme denselben ebenfalls und zeichne hiernach die ganze Kurve.

20) Ebenso ermittele man die Gestalt und die besonderen Punkte der Kurve:

$$(y + x^2 - x - 2)^2 = 4x^5.$$

21) Gegeben ein Punkt A und eine feste Gerade BC. Durch A zieht man eine beliebige Gerade G, welche BC schneidet, und trägt vom Durchschnitt aus auf G eine gegebene Strecke a ab. — Man erhält hierdurch einen Punkt P, dessen Ort zu bestimmen ist. —

Antw. Ist A der Anfangspunkt, die Abscissenachse parallel zu BC und b der Abstand des Punktes A von BC, so findet man als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$(x^2 + y^2)(y - b)^2 = a^2 y^2.$$

Man bestimme die Gestalt dieser Kurve, welche Konchoide genannt wird, näher, und zwar für die Fälle wenn $a \lesseqgtr b$ ist.

22) Eine Stange BC (Fig. 59) dreht sich um den festen Endpunkt B. Eine zweite Stange DE ist mit BC im Punkte C durch ein Gelenk verbunden. — Der Endpunkt E durchläuft die Gerade AX; man soll die Kurve ermitteln, welche der andere Endpunkt D beschreibt. (Planimeter.)

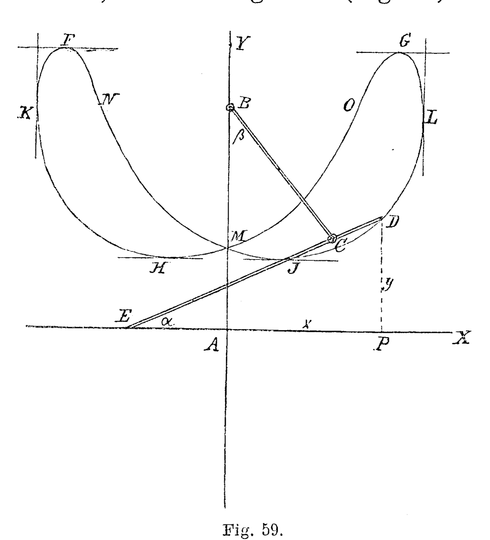


Fig. 59.

Man nehme AX als Abscissenachse, das Lot AB von B aus als Ordinatenachse an. — Ferner sei $AB = m$, $BC = r$, $CE = a$, $CD = b$. — Bei einer beliebigen Lage der beiden Stangen bilde DE mit der Abscissenachse den Winkel α, und BC mit der Ordinatenachse den Winkel β, dann ist, wenn $AP = x$, $DP = y$:

$$y = (a + b) \sin \alpha$$
$$x = r \sin \beta + b \cdot \cos \alpha.$$

Ferner ist: $$m = a \sin \alpha + r \cos \beta.$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\cos \beta = \frac{m - a \sin \alpha}{r}.$$

Eliminiert man mittels dieser Formel den Winkel β aus x, so hat man:

$$y = (a + b) \sin \alpha$$
$$x = b \cos \alpha \pm \sqrt{r^2 - (m - a \sin \alpha)^2}.$$

Die Gleichung der Kurve ergiebt sich, wenn man aus diesen beiden Gleichungen den veränderlichen Winkel α eliminiert. — Man erhält:

$$(a + b)\,x = b\sqrt{(a+b)^2 - y^2} \pm \sqrt{r^2(a+b)^2 - [m(a+b) - ay]^2}.$$

Zahlenbeispiel: $a = 4$, $b = 1$, $m = 4$, $r = 3$.

Aufl. Die Punkte, in welchen die Tangente mit der Abscissenachse parallel ist, sind:

F (— 3,5), G (3,5), H (— 0,966, 1,25), J (0,966, 1,25).

Ferner sind in K (— 3,463, 3,494) und L (3,463, 3,494) die Tangenten parallel zur Ordinatenachse. — Die Kurve hat zwei Wendepunkte N (— 2,36, 4,14) und O (2,36, 4,14) und einen Doppelpunkt M (0, 1,46 . .).

Fusspunktkurven.

23) Den Ort der Fusspunkte aller Lote zu finden, welche vom Mittelpunkt einer Ellipse auf allen Tangenten derselben gefällt werden können.

Antw. Die Gleichung des Ortes ist:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

24) Ebenso den Ort der Fusspunkte der Senkrechten zu bestimmen, welche vom Mittelpunkt auf die Tangenten einer Hyperbel gefällt werden können.

Antw. Man findet als Gleichung des Ortes:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$$

Ist die Hyperbel gleichseitig, so erhält man als Fusspunktskurve die Lemniskate.

25) Vom Scheitel einer Parabel werden auf alle Tangenten derselben Lote gefällt. — Man soll den Ort der Fusspunkte bestimmen.

Antw. Die Gleichung des Ortes ist $y = \sqrt{\frac{-2x^3}{p + 2x}}$ (s. Aufgabe 4).

26) Den Ort der Fusspunkte aller Lote zu finden, welche man von einem beliebigen Punkte P auf die Tangenten eines Kreises vom Halbmesser a fällen kann.

Antw. Ist P der Anfangspunkt und die Gerade von P nach dem Mittelpunkte C die positive Richtung der Abscissenachse, ferner $CP = k$, so erhält man als Gleichung des Ortes:

$$\sqrt{x^2 + y^2}\,(\sqrt{x^2 + y^2} - a) = kx.$$

In Polarkoordinaten ausgedrückt heisst die Gleichung:

$$r = a\left(1 + \frac{k}{a}\cos\varphi\right).$$

Man bestimme die Gestalt für $k \gtreqless a$. (Vergl. B. 18 d. Abschn.)

---

27) Den Krümmungshalbmesser der Ellipse und die Koordinaten α und β des Krümmungsmittelpunktes zu finden.

Antw. $\rho = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$; $x - \alpha = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,x}{a^4b^2}$;

$$\beta - y = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}.$$

Für den Endpunkt der grossen Achse ist $\rho = \frac{b^2}{a}$, und für den Endpunkt der kleinen Achse findet man $\rho = \frac{a^2}{b}$. — Konstruiere diese beiden Strecken.

28) Bei der Hyperbel findet man folgende Formeln für den Krümmungshalbmesser und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\rho = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}; \quad x - \alpha = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,x}{a^4b^2};$$

$$y - \beta = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}.$$

29) Man bestimme den Krümmungshalbmesser der Parabel, und die Koordinaten α und β des Krümmungsmittelpunktes. —

Antw.

$$\rho = -\sqrt{\frac{(2x + p)^3}{p}}. \quad \alpha = 3x + p; \quad \beta = -\frac{y^3}{p^2} = -\sqrt{\frac{8x^3}{p}}.$$

30) Es soll bewiesen werden, dass für alle Kegelschnitte der Krümmungshalbmesser $= -\frac{N^3}{p^2}$ ist, wenn N die Normale, und p der Parameter (Brennpunktsordinate) des Kegelschnittes ist. (Konstruktion.)

31) Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte (Evolute) einer gegebenen Kurve $y = f(x)$ findet man durch Elimination von x und y aus den Gleichungen:

$$\beta - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad x - \alpha = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y = f(x).$$

Man bestimme hiernach die Gleichungen der Evoluten der Kegelschnitte.

Antw.

Die Gleich. der Evolute für die Ellipse ist: $\left(\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$

" " " " " " Hyperbel " $\left(\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$

" " " " " " Parabel " $\beta^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(\alpha - p)^3}{p}$ (Neil'sche Parabel).

32) Den Krümmungshalbmesser ρ in Polarkoordinaten auszudrücken.

Antw. $$\rho = \frac{\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^3}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

33) Zieht man im Pol A (Fig. 60) eine Senkrechte zum Leitstrahl AM, so wird dieselbe von der Tangente und Normale des Punktes M in T und N geschnitten. — Die Strecken AT und AN heissen die Polarsubtangente, bez. Polarsubnormale für den Punkt M. —

Man soll die Polarsubtangente und die Polarsubnormale für den Punkt M (φ, r) einer gegebenen Kurve finden.

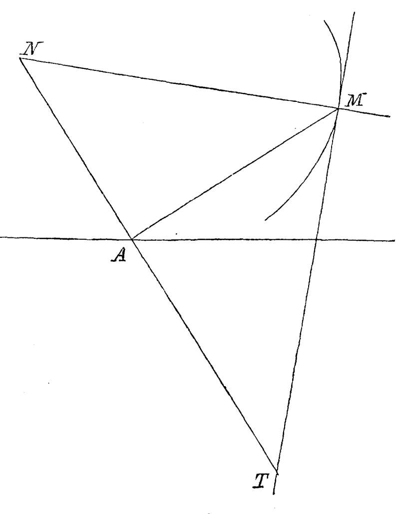


Fig. 60.

Antw.

$$AT = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\varphi}}, \quad AN = \frac{dr}{d\varphi}.$$

Für die Kegelschnitte erhält man hieraus, wenn der Pol in einem Brennpunkte liegt:

$$AT = \frac{p}{\xi \sin \varphi}, \quad AN = \frac{p\,\xi \sin \varphi}{(1 + \xi \cos \varphi)^2}.$$

Bei der Parabel, für welche $\xi = 1$ ist, folgt:

$$AT = \frac{p}{\sin\varphi}, \quad AN = \frac{p\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Aufgaben über einhüllende Kurven.

34) Wenn in der Gleichung der Kurve:

$$f(x, y, k) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

für k eine Reihe verschiedener Werte eingesetzt werden, so entspricht jedem derselben eine bestimmte Kurve der durch die Gleichung (1) charakterisierten Art. Zwei aufeinander folgende Kurven dieser Art seien:

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, k) = 0 \\ f(x, y, k + \Delta k) = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Dieselben schneiden sich in einem Punkte M, dessen Koordinaten beiden Gleichungen genügen müssen. — Ändert sich k stetig, so rücken die Durchschnittspunkte der aufeinander folgenden Kurven unmittelbar aneinander und bilden eine Kurve, welche man die Einhüllende der durch (1) bestimmten Schar nennt. — Die Einhüllende hat mit jeder der Kurven (1) zwei aufeinander folgende Punkte gemeinschaftlich, d. h. sie berührt alle Kurven der Schar. — Diejenigen Werte von x und y, welche den Gleichungen (2) zugleich genügen, sind bei unendlich kleinem Δk die Koordinaten eines Punktes der einhüllenden Kurve. Sie müssen demnach auch der Differenz beider Gleichungen:

$$f(x, y, k + \Delta k) - f(x, y, k) = 0$$

oder der Gleichung:

$$\frac{f(x, y, k + \Delta k) - f(x, y, k)}{\Delta k} = 0$$

genügen. — Die letztere geht aber bei unendlich kleinem Δk über in:

$$\frac{\partial f(x, y, k)}{\partial k} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Wenn demnach die Gleichungen (1) und (3) für x und y gleichzeitig bestehen, so bedeuten x und y die Koordinaten desjenigen Punktes der Einhüllenden, in welchem die letztere die Kurve $f(x, y, k) = 0$ berührt. Da jedem neuen Wert von k ein neues Paar von Werten für x und y entspricht, so ist die Einhüllende durch das Zusammenbestehen von (1) und (3) bestimmt. Um die eigentliche Gleichung derselben zu finden, d. h. y als Funktion von x auszudrücken, ist k aus (1) und (3) zu eliminieren. —

35) Der Mittelpunkt eines Kreises bewegt sich auf der Abscissenachse. Der Halbmesser ist stets das n fache der Entfernung des Mittelpunktes vom Anfangspunkt. — Wie heisst die Gleichung der Einhüllenden?

Antw. $y = \pm \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}} x$; dieselbe stellt zwei durch den Anfangspunkt gehende Geraden dar. — Man beachte die Fälle $n \gtreqless 1$.

36) Der Scheitel eines rechten Winkels bewegt sich auf der Ordinatenachse. Der eine Schenkel geht stets durch einen festen Punkt B, welcher auf der Abscissenachse im Abstand a vom Anfangspunkt liegt. — Die Gleichung der Einhüllenden des anderen Schenkels zu finden.

Antw. $y^2 = 4ax$; die gesuchte Kurve ist demnach eine Parabel.

37) Der Mittelpunkt eines Kreises durchläuft die Abscissenachse. — Sein Halbmesser ist stets gleich der im Mittelpunkte errichteten Ordinate der Parabel $y^2 = 2px$. — Wie heisst die Gleichung der Einhüllenden?

Antw. $y^2 = 2p(x + p)$. Die Einhüllende ist eine der ersten kongruente Parabel.

38) Gegeben die Mittelpunktsgleichung:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

eines Kreises. — Der Mittelpunkt C eines anderen Kreises durchläuft die Abscissenachse, und der Halbmesser desselben ist stets gleich der in C errichteten Ordinate des Kreises (1). Die Einhüllende zu finden.

Antw. $y^2 + \frac{x^2}{2} = r^2$. — Ellipse, deren Achsen $r\sqrt{2}$ und r sind.

39) Auf den Schenkeln des Winkels BAC liegen die festen Punkte B und C. Eine bewegliche Gerade schneidet die Schenkel des Winkels in D und E, so dass BD = CE ist. Der Punkt D liegt zwischen A und B, E ausserhalb AC oder umgekehrt. Welches ist die Einhüllende dieser Geraden?

Antw. Man findet eine Parabel.

40) Eine Gerade von gegebener Länge a gleitet mit ihren Endpunkten an den Koordinatenachsen. — Wie heisst die Gleichung der Einhüllenden?

Antw. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

41) Wird von einem Punkte A der Horizontalebene aus ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit c unter dem Elevationswinkel φ aufwärts geworfen, so durchläuft derselbe die Parabel:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 c^2 \cdot \cos^2 \varphi}.$$

Wenn nun von A aus beliebig viele Körper mit derselben Anfangsgeschwindigkeit c nach allen möglichen Richtungen in derselben Vertikalebene aufwärts geworfen werden, welche Kurve hüllt alsdann die sämtlichen Wurflinien ein?

Antw. Eine Parabel, deren Gleichung $y = \frac{c^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 c^2}$ ist.

42) Die Einhüllende aller Geraden zu finden, welche mit zwei gegebenen festen Geraden G_1 und G_2 ein Dreieck von gegebener Fläche bildet.

Antw. Man findet zwei Hyperbeln, deren Asymptoten G_1 und G_2 sind.

43) Die Einhüllende aller Kreise zu finden, deren Mittelpunkte auf der Ordinatenachse liegen, und welche auf der, durch den Anfangspunkt gehenden Geraden AB, eine Sehne von der Länge 2a abschneiden.

Antw. Ist φ der Winkel, welchen AB mit der Abscissenachse bildet, so findet man als Gleichung der Einhüllenden:

$$y^2 \cos^2 \varphi - x^2 \sin^2 \varphi = - a^2 \sin^2 \varphi,$$

also eine Hyperbel, deren Achsen a und $a \operatorname{tg} \varphi$ sind. — AB ist eine der Asymptoten. —

44) Die Einhüllende aller Kreise zu finden, deren Mittelpunkte auf der Parabel $y^2 = 2px$ liegen und deren Umfänge durch den Brennpunkt gehen. —

Antw. Die Gleichung der Einhüllenden ist $x = -\frac{p}{2}$. (Leitlinie.)

45) Ebenso die Einhüllende aller Kreise zu finden, deren Mittelpunkte auf dem Umfang der Ellipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ liegen und deren Umfänge 1) durch einen Brennpunkt, 2) durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen.

Antw. 1) Ein Kreis vom Halbmesser 2a, dessen Mittelpunkt der andere Brennpunkt ist. 2) $(x^2 + y^2)^2 = 4 (a^2 x^2 + b^2 y^2)$.

46) Dieselben Aufgaben für die Hyperbel zu lösen.



Übergang von Punktkoordinaten zu Linienkoordinaten.

47) Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Kurve, dann sind die Abschnitte, welche die Tangente im Punkte (x, y) auf den Koordinatenachsen macht:

$$x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}}, \quad \text{und} \quad y - x\frac{dy}{dx}.$$

Die Koordinaten der Tangente sind demnach:

$$u = \frac{\frac{dy}{dx}}{y - x\frac{dy}{dx}}, \quad v = \frac{1}{x\frac{dy}{dx} - y} \quad \cdots \cdots (1)$$

Die Differentiation der Gleichung der Kurve giebt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

Durch Elimination von x, y und $\frac{dy}{dx}$ aus (1), (2) und der Gleichung $F(x, y) = 0$ ergiebt sich die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten.

Übergang von Linienkoordinaten zu Punktkoordinaten.

48) Ist

$$F(u, v) = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

die Gleichung einer Kurve in Linienkoordinaten, dann ist:

$$ux + vy + 1 = 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

die Gleichung einer Tangente der Kurve, wenn u und v der Gleichung (1) genügen. Werden u und v um Δu, bez. Δv verändert, dann geht (2) über in:

$$(u + \Delta u)x + (v + \Delta v)y + 1 = 0, \quad \cdots \cdots (3)$$

welches die Gleichung einer zweiten, der ersten unendlich nahe liegenden Tangente ist. — Der Durchschnitt dieser Tangenten ist ein Punkt der Kurve (1), und weil die Koordinaten desselben den Gleichungen (2) und (3) genügen, so werden sie auch der Differenz beider Gleichungen, nämlich:

$$\Delta u \cdot x + \Delta v \cdot y = 0$$

Genüge leisten. — Für unendlich kleine Änderungen von u und v geht diese Gleichung über in:

$$x + y\frac{dv}{du} = 0 \quad \cdots \cdots (4)$$

Differenziiert man die Gleichung (1) nach u, so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} = 0 \quad \text{oder:} \quad \frac{dv}{du} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}.$$

Setzt man diesen Wert in (4) ein, so folgt:

$$x \frac{\partial F}{\partial v} - y \frac{\partial F}{du} = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

Durch Elimination von u und v aus (1), (2) und (5) erhält man die Gleichung der gegebenen Kurve in Punktkoordinaten.

49) Aus den Mittelpunktsgleichungen des Kreises und der Kegelschnitte für Punktkoordinaten hiernach die Gleichungen dieser Kurven in Linienkoordinaten abzuleiten, und umgekehrt.

50) Die Gleichung $uv = 1$ in Punktkoordinaten auszudrücken.

Antw. $xy = \frac{1}{4}$. (Gleichseitige Hyperbel.)

B. Die Rolllinien.

1) Ein Punkt A im Umfange eines gegebenen Kreises P (Fig. 61), welcher auf einer festen Geraden rollt, ohne zu gleiten, beschreibt eine Kurve, welche Cykloide genannt wird.

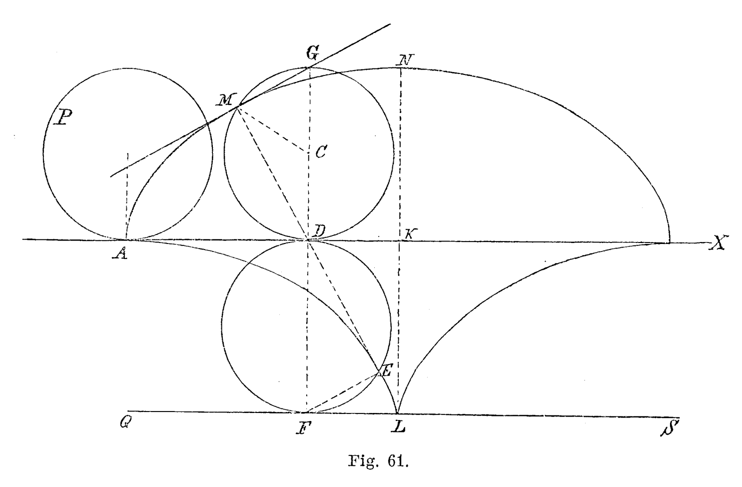


Fig. 61.

Ist der Berührungspunkt A des Kreises K mit der festen Geraden AX der Anfangspunkt, AX Abscissenachse, und bezeichnet man den Radius des Kreises mit r; ferner den Winkel MCD, welchen bei einer beliebigen Lage des rollenden Kreises der Halbmesser nach dem zuge-

hörigen Cykloidenpunkt M mit dem zu AX senkrechten Halbmesser bildet, mit φ, so findet man leicht:

$$y = r\,(1 \cos\varphi); \quad x = r\,(\varphi - \sin\varphi) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

Die Elimination von φ würde die Gleichung zwischen x und y liefern. — Da jedoch der Ausdruck für x, φ und $\sin\varphi$ enthält, so pflegt man die Elimination nicht auszuführen, sondern die beiden Gleichungen (1), welche x und y als Funktionen von φ ausdrücken, zu benutzen. — Jedem Wert von φ, welchen man in die Gleichungen (1) einsetzt, entsprechen zwei zusammengehörige Werte von x und y, die Koordinaten eines Punktes der Cykloide. —

Näherungsweise Konstruktion der Cykloide mit Berücksichtigung, dass $\overline{AD} = \widehat{DM}$.

2) Wie heisst die Gleichung der Tangente im Punkte $M\,(x_1 y_1 \varphi_1)$ der Cykloide:

$$y = r\,(1 - \cos\varphi); \quad x = r\,(\varphi - \sin\varphi)?$$

Antw. $$y - y_1 = \operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2}\,(x - x_1).$$

3) Für denselben Punkt die Gleichung der Normale zu finden.

Antw. $$y - y_1 = -\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\,(x - x_1).$$

4) Wo schneidet die Tangente und wo die Normale die Abscissenachse?

Antw. Die Tangente schneidet die Abscissenachse im Abstand $x_1 - y_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}$, die Normale im Abstand $x_1 + y_1 \operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2} = r_1\varphi$ vom Anfangspunkt.

5) Die Länge der Normale im Punkte $M\,(x_1 y_1 \varphi_1)$ zu finden.

Antw. $$2\,r \sin\frac{\varphi_1}{2}.$$

6) Wie gross ist der Krümmungshalbmesser ρ der Cykloide im Punkte $M\,(x_1 y_1 \varphi_1)$?

Antw. $\rho = -4r\sin\frac{\varphi_1}{2}$, ($\rho$ ist also gleich der doppelten Normale).

7) Verlängert man die Normale DM (Fig. 61), so dass DE = DM ist, so erhält man in E den Krümmungsmittelpunkt für den Punkt M. — Wenn man nun unterhalb AB einen dem rollenden Kreis gleichen Kreis zeichnet, welcher AB in D berührt, so ist ersichtlich, dass E auf diesem Kreise liegen muss. Man ziehe noch die Tangente QS parallel

zu AB, und durch die Mitte K der Geraden AB die Lotrechte LN zu QS, dann findet man leicht folgende Gleichungen:

$\overline{AD} = \widehat{DM}$, $AK = \widehat{DMG}$, folglich auch $\overline{DK} = \widehat{GM}$. — Da nun $\widehat{EF} = \widehat{GM}$ und $\overline{DK} = \overline{FL}$, so ist auch: $\widehat{EF} = \overline{FL}$. Hiernach liegt der Krümmungsmittelpunkt E auf einer der gegebenen kongruenten Cykloide, welche E beschreibt, wenn der untere Kreis auf QS rollt. — Diese Cykloide ist demnach die Evolute der gegebenen Cykloide.

Leicht findet man hieraus die Bogenlänge der Cykloide. Wird ein um LEA liegender in L befestigter Faden abgewickelt, so beschreibt der Endpunkt A die obere Cykloide. Ist nun A nach N gelangt, so ist derselbe zu einer Geraden $LN = 4r$ ausgestreckt, welche dem halben Bogen der vollständigen Cykloide gleich ist. — Die ganze Bogenlänge ist $= 8r$, sie lässt sich also rational durch den Halbmesser des rollenden Kreises ausdrücken. —

Gestreckte und verschlungene Cykloide.

8) Die Gleichung der Kurve zu finden, welche ein Punkt B in der Entfernung a vom Mittelpunkt des wälzenden Kreises K beschreibt, wenn der Kreis auf einer Geraden rollt.

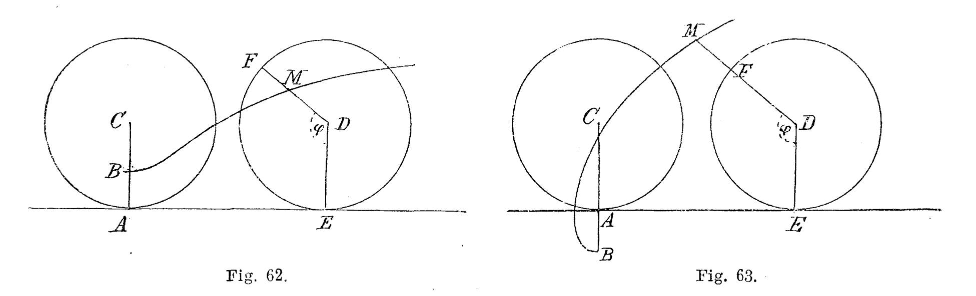


Fig. 62. Fig. 63.

Ist a kleiner als der Radius r des Wälzungskreises, so liegt B innerhalb desselben, und die von B beschriebene Kurve heisst gestreckte Cykloide (Fig. 62). Ist a grösser als r, so beschreibt der jetzt ausserhalb des Kreises liegende Punkt B die verschlungene Cykloide (Fig. 63). — Führt man wieder wie in 1) den Winkel φ ein, so findet man die Gleichungen:

$$y = r\left(1 - \frac{a}{r}\cos\varphi\right), \quad x = r\left(\varphi - \frac{a}{r}\sin\varphi\right),$$

wenn die feste Gerade, auf welcher der Kreis K rollt, als Abscissenachse, und der Endpunkt A des Halbmessers, welcher durch B geht

und senkrecht zur Abscissenachse steht, zum Anfangspunkt genommen wird. —

Die Gleichungen der drei bisher betrachteten Cykloiden haben die allgemeine Form:

$$y = r(1 - \xi \cdot \cos\varphi)$$
$$x = r(\varphi - \xi \cdot \sin\varphi).$$

Diese letzteren bedeuten demnach: eine gemeine Cykloide, wenn $\xi = 1$; eine gestreckte Cykloide, wenn $\xi < 1$; eine verschlungene Cykloide, wenn $\xi > 1$ ist.

9) Nachzuweisen, dass bei der gestreckten und verschlungenen Cykloide die Normale eines Punktes M, nach dem Berührungspunkte des zugehörigen Wälzungskreises mit der Abscissenachse geht. —

10) Welchen Winkel bildet die gestreckte Cykloide im Punkte B mit der Abscissenachse?

Antw. Man findet $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin\varphi}{r - a\cos\varphi}$; ist $\varphi = 0$, so ist $\frac{dy}{dx} = 0$. — Die Tangente in B ist parallel zur Abscissenachse. —

11) Die Wendepunkte der gestreckten Cykloide zu finden.

Antw. Für einen Wendepunkt findet man als zugehörigen Wert des Winkels φ:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r},$$

wonach derselbe leicht zu konstruieren ist.

Epicykloide.

12) Ein Kreis K (Fig. 64) rollt auf dem äusseren Umfang eines anderen festen Kreises K_1. Ein mit dem rollenden Kreise fest verbundener Punkt M beschreibt alsdann eine Kurve, welche im allgemeinen eine Epicykloide genannt wird, und zwar eine gemeine Epicykloide, wenn M auf dem Umfang des Kreises K liegt; eine gestreckte Epicykloide, wenn M innerhalb, und eine verschlungene Epicykloide, wenn M ausserhalb des rollenden Kreises liegt.

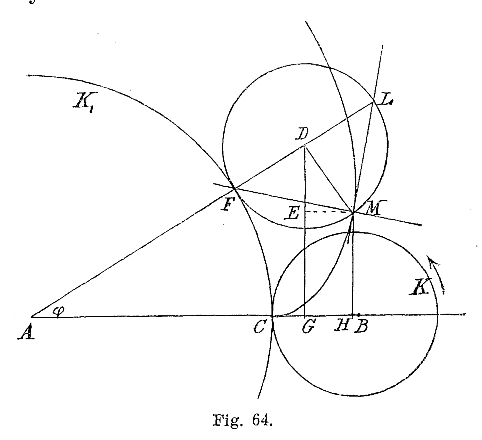


Fig. 64.

Der Mittelpunkt A des festen Kreises sei der Anfangspunkt, die Gerade von A nach dem Mittelpunkt B des rollenden Kreises die Abscissenachse; der Berührungspunkt C beschreibe die Kurve. Ist nun der Mittelpunkt B nach D gelangt und bei dieser Lage M der entsprechende Punkt der Epicykloide, so kann man die Koordinaten desselben, nämlich $AH = x$ und $HM = y$ leicht als Funktionen des veränderlichen Winkels $DAB = \varphi$ ausdrücken. Man zieht den Halbmesser DM, ferner von D die Senkrechte DG zur Abscissenachse und EM parallel zu derselben. Ist $AC = R$ und $BC = r$, $\angle FDM = \beta$, so hat man:

$$x = (R + r)\cos\varphi + r\sin(\beta + \varphi - 90) = (R + r)\cos\varphi - r\cos(\beta + \varphi)$$

$$y = (R + r)\sin\varphi - r\cos(\beta + \varphi - 90) = (R + r)\sin\varphi - r\sin(\beta + \varphi).$$

Aus der Gleichheit der Bögen CF und FM ergiebt sich die Art der Abhängigkeit des Winkels β von φ; es ist nämlich:

$$r\beta = R\varphi \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{R}{r}\varphi.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die für x und y gefundenen Ausdrücke ergeben sich die Gleichungen der Epicykloide:

$$x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\left(\frac{R + r}{r}\varphi\right)$$

$$y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\left(\frac{R + r}{r}\varphi\right).$$

13) Wie heissen die Gleichungen der gestreckten und der verschlungenen Epicykloide?

Antw. Ist a die Entfernung des die Kurve beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt des rollenden Kreises, so erhält man für beide Cykloiden die Gleichungen:

$$x = (R + r)\cos\varphi - a\cos\left(\frac{R + r}{r}\varphi\right)$$

$$y = (R + r)\sin\varphi - a\sin\left(\frac{R + r}{r}\varphi\right).$$

Für $a < r$ bedeuten diese Gleichungen eine gestreckte, für $a > r$ eine verschlungene Cykloide. —

14) Zu beweisen, dass die Normale im Punkte M (Fig. 64) nach dem Berührungspunkte F des rollenden und festen Kreises, und die Tangente in M nach dem Endpunkte L des von F gezogenen Durchmessers geht.

15) Wie heissen die Gleichungen der Epicykloide, wenn der rollende Kreis dem festen Kreise gleich ist? (Kardioide.)

Antw.
$$x = 2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi$$
$$y = 2r\sin\varphi - r\sin 2\varphi.$$

Die Gestalt der Kardioide ist die in Fig. 65 angegebene. Der bewegliche Punkt M kommt nach einem Umlauf wieder im Ausgangspunkte A an. — Man beweise noch folgende sehr einfache Konstruktion der Kurve: Von A aus zieht man die Gerade AM beliebig, trägt vom Schnittpunkte B dieser Geraden mit dem festen Kreis die Strecken BM = BD = dem Durchmesser des Kreises, ab. D und M sind dann Punkte der gesuchten Kurve.

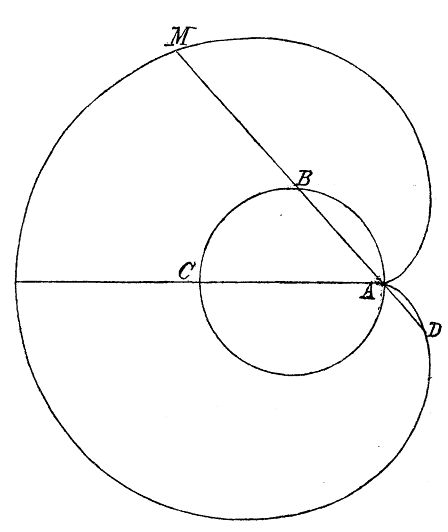


Fig. 65.

16) Die Gleichung der Kardioide in rechtwinkligen Koordinaten auszudrücken. (A Anfangspunkt.)

Antw. Man findet:

$$(x^2 + y^2)^2 - 4rx(x^2 + y^2) - 4r^2y^2 = 0.$$

17) Wie heisst die Polargleichung der Kardioide, wenn in Fig. 65 A der Pol, AC die feste Achse, der Halbmesser des festen oder beweglichen Kreises a, und die veränderlichen Polarkoordinaten mit r und φ bezeichnet werden. Antw. $r = 2a(1 + \cos\varphi)$.

18) Die Polargleichungen der verschlungenen und der gestreckten Kardioide zu finden. —

Antw. Der Halbmesser des festen sowohl als der des Wälzungskreises sei a; der auf der Centrale liegende Punkt A, welcher mit dem Kreise D fest verbunden ist, beschreibe die Kurve, dann zeigt

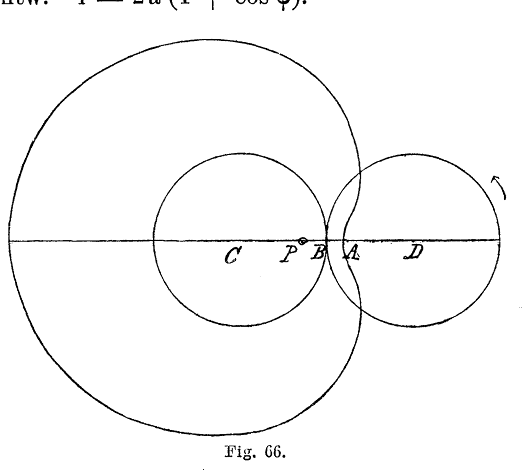


Fig. 66.

Fig. 66, bei welcher A innerhalb des Wälzungskreises liegt, die ge-

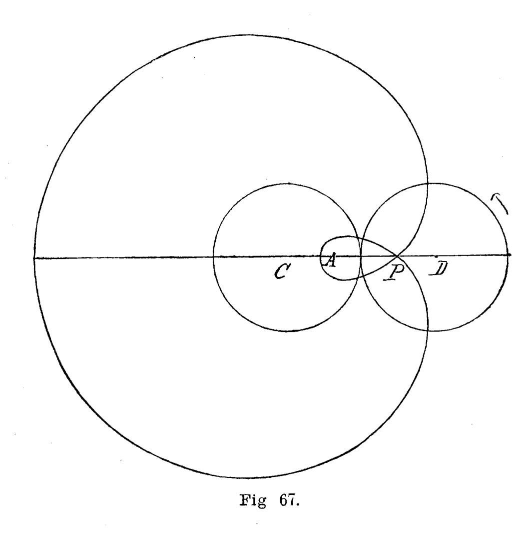


Fig 67.

streckte und Fig. 67, in welcher A ausserhalb des Kreises D liegt, die verschlungene Kardioide. — Man mache CP = AD und nehme in beiden Fällen den so bestimm- Punkt P als Pol an, dann findet man leicht als Polargleichung:

$$r = 2a\left(1 + \frac{k}{a}\cos\varphi\right).$$

Hierin ist k = AD. — Wenn also $k > a$, so bedeutet diese Gleichung die verschlungene, und wenn $k < a$, die gestreckte Kardioide. —

Hypocykloide.

19) Rollt ein Kreis K auf dem inneren Umfang eines festen Kreises K_1, so beschreibt ein mit dem Kreise K fest verbundener Punkt M, je nachdem der letztere auf dem Umfang, innerhalb, oder ausserhalb des Kreises K liegt, eine gemeine, bez. gestreckte, oder verschlungene Hypocykloide.

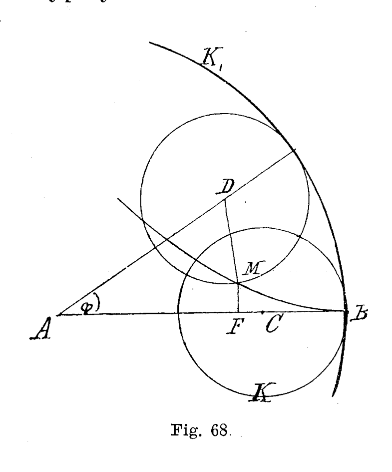


Fig. 68.

Ist B der Berührungspunkt des festen und wälzenden Kreises (Fig. 68), AB die Abscissenachse, der Mittelpunkt A des festen Kreises der Anfangspunkt, M ein beliebiger Punkt der gemeinen Hypocykloide, AF = x und FM = y die Koordinaten desselben, φ der Winkel, um welchen sich die Centrale gedreht hat, so findet man als Gleichungen der Hypocykloide:

$$x = (R - r)\cos\varphi + r\cos\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right),$$

$$y = (R - r)\sin\varphi - r\sin\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right).$$

Anmerkung. Man erhält diese Gleichungen auch aus denen der Epicikloide, wenn man in denselben r negativ nimmt. —

20) Man soll die Gleichungen der verschlungenen und gestreckten Hypocykloide bestimmen.

Antw. Ist a die Entfernung des beweglichen Punktes vom Mittelpunkt des rollenden Kreises, so findet man die Gleichungen:

$$x = (R - r)\cos\varphi + a\cdot\cos\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right)$$

$$y = (R - r)\sin\varphi - a\ \sin\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right).$$

Ist $a < r$ so bedeuten dieselbe die gestreckte Hypocykloide und wenn $a > r$, die verschlungene Hypocykloide. —

21) Wenn $R = 2r$ ist, so heissen die in 19) angegebenen Gleichungen der Hypocykloide:

$$x = 2r\cos\varphi$$
$$y = 0.$$

Für diesen Fall geht die Kurve in eine mit der Abscissenachse zusammenfallende Gerade über.

Man soll die Gleichungen der gestreckten und verschlungenen Hypocykloide aufstellen, wenn $R = 2r$, und a die Entfernung des beweglichen Punktes vom Mittelpunkt des rollenden Kreises ist.

Antw. Man findet eine Ellipse.

22) Die Gleichung der Einhüllenden der Ellipsen zu finden, welche in der vorigen Aufgabe von allen Punkten eines Durchmessers des Wälzungskreises beschrieben werden.

Antw. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$

C. Spiralen.

1) Die Polargleichung einer Kurve sei $r = f(\varphi)$. Ist $f(\varphi)$ keine periodische Funktion, welche, wie z. B. die trigonometrischen Funktionen, von 0 bis 2π dieselben Werte wie von 2π bis 4π u. s. f. annimmt, so geht die Kurve in unzählig vielen Windungen um den Pol und wird eine Spirale genannt. — Die einfachste Polargleichung dieser Art ist $r = a\varphi$, (φ Bogenlänge zum Radius 1). Für $\varphi = 0$ ist $r = 0$, also geht die Kurve durch den Pol; ferner ist

für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $r = a\frac{\pi}{2}$

„ $\varphi = \pi$, $r = a\pi$

„ $\varphi = 2\pi$, $r = 2a\pi$

„ $\varphi = 4\pi$, $r = 4a\pi$ u. s. f.

Diese Kurve, deren Gestalt hieraus leicht erkennbar ist, heisst die archimedische Spirale. Zwei zusammenfallende Leitstrahlen, welche den Winkeln $n\pi$ und $(n+2)\pi$ entsprechen, haben die Längen $r_1 = an\pi$ und $r_2 = a(n+2)\pi$. Folglich ist $r_2 - r_1 = 2a\pi$. Auf einem beliebigen Leitstrahle werden demnach von der archimedischen Spirale unzählig viele gleiche Strecken von der Länge $2a\pi$ abgeschnitten. —

2) Die Gestalt der parabolischen Spirale, deren Gleichung $r^2 = 2a\varphi$ ist, soll bestimmet werden. — Zu beweisen, dass der Abstand der beiden Schnittpunkte eines Leitstrahles mit zwei aufeinander folgenden Windungen der Spirale gleich $\frac{4a\pi}{r_1 + r_2}$ ist, wenn r_1 und r_2 die Längen der zugehörigen Leitstrahlen bedeuten. Ferner soll gezeigt werden, dass die Differenz der Quadrate der Leitstrahlen konstant ist. (Die aufeinander folgenden Schnittpunkte eines Leitstrahles mit der Spirale liegen hiernach um so näher bei einander, je weiter die Punkte vom Pole entfernt sind.)

3) Hyperbolische Spirale. Die Gleichung dieser Kurve heisst $r = \frac{a}{\varphi}\cdot$ Für $\varphi = 0$ ist r unendlich gross. Es soll gezeigt werden, dass die Kurve eine zum festen Schenkel des Winkels φ parallele Asymptote besitzt, deren Abstand vom Pol gleich a ist. — Zeichnet man um den Pol als Mittelpunkt durch einen beliebigen Punkt der Spirale einen Kreisbogen bis zum festen Schenkel des Winkels φ, so hat derselbe die konstante Länge a. — Die Kurve nähert sich mit wachsendem Winkel φ dem Pole fortwährend und erreicht denselben nach unzählig vielen Windungen.

4) Die Spirale: $r^2 = \frac{a}{\varphi}$ (welche Lituus genannt wird) hat den festen Schenkel des Winkels φ zur Asymptote und nähert sich mit unzählig vielen Windungen dem Pole.

5) Exponential- oder logarithmische Spirale. Die Gleichung derselben heisst: $r = ae^{\varphi}$ oder $\varphi = l\left(\frac{r}{a}\right)\cdot$ Zeige, dass diese Kurve von irgend einem ihrer Punkte aus bis zum Pol unzählig viele Windungen macht, und von demselben Punkte aus nach aussen ebenfalls mit unzählig vielen Windungen ins Unendliche geht. ($e = 2{,}7182818\,..$)

6) Die Gestalt der folgenden Spirale:

$$r = a(\varphi \pm \sin 2n\varphi),$$

welche mit der archimedischen Spirale $r = a\varphi$ eine Reihe von Punkten gemeinschaftlich hat, zu untersuchen. — (Wellenförmige Spirale.)

Es sei, um einen speciellen Fall näher zu bestimmen, $n = 4$. Zeichnet man zunächst die archimedische Spirale $r = a\varphi$, so ist leicht ersichtlich, dass jedesmal, wenn 8φ ein Vielfaches von π wird, die wellenförmige Spirale die archimedische Spirale schneidet. In Fig. 69 sind vom Pol aus Leitstrahlen gezeichnet, von welchen je zwei aufeinander folgende den Winkel $\frac{\pi}{8}$ miteinander bilden. Die sämtlichen Punkte, in welchen diese Strahlen die archimedische Spirale treffen, sind auch Punkte der wellenförmigen Spirale $r = a(\varphi \pm \sin 8\varphi)$. Wenn 8φ zwischen $2n\pi$ und $(2n+1)\pi$ liegt, so ist $\sin 8\varphi$ positiv; von $(2n+1)\pi$ bis $(2n+2)\pi$ dagegen negativ. — In dem ersten Intervall liegt die Kurve über, im zweiten unter der archimedischen Spirale. — Umgekehrt wenn $\sin 8\varphi$ das Minuszeichen erhält. — Die grössten und kleinsten Entfernungen der Kurvenpunkte von der archimedischen Spirale in der Richtung des Leitstrahles gemessen, liegen in den Halbierungslinien der Winkel $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ u. s. f. —*)

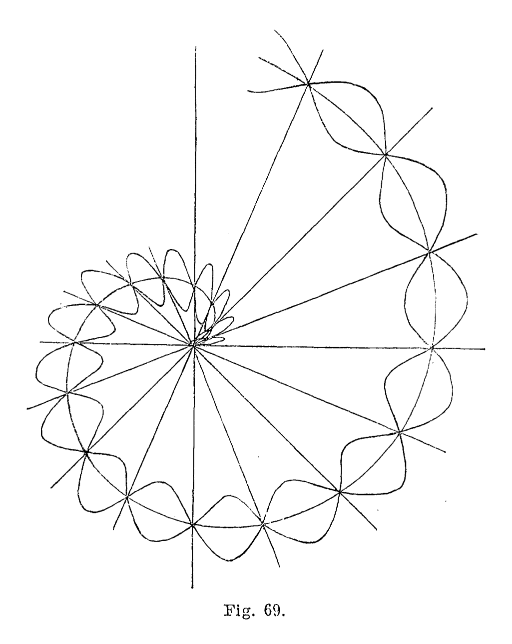


Fig. 69.

7) Eine Gerade AB dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit w um ihren Endpunkt A. — Gleichzeitig bewegt sich ein Punkt von A aus mit der Geschwindigkeit c auf AB. — Welche Kurve durchläuft der bewegliche Punkt?

---

*) Die von den beiden Zweigen der Spirale abgegrenzten Flächenteile haben der Reihe nach folgende Inhalte: $\frac{1}{32}a^2\pi$, $\frac{3}{32}a^2\pi$, $\frac{5}{32}a^2\pi$, u. s. f., wie sich leicht aus der Formel $f = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 d\varphi$ ergiebt. — Für den obigen Fall ist die Fläche eines

Antw. Man findet als Gleichung der Kurve $r = \frac{c}{w} \cdot \varphi$, also eine archimedische Spirale. —

8) Die Gerade AB dreht sich um den Punkt A so, dass die Winkel in arithmetischer und die Längen in geometrischer Progression zunehmen. Welche Kurve durchläuft der Endpunkt?

Antw. Sind α und $\alpha + \delta$ die Grössen der Drehungen nach der ersten und zweiten Zeiteinheit, a und $a \cdot e$ die Längen nach denselben Zeiten, so findet man als Gleichung der Kurve: $r = a e^{\frac{\varphi - \alpha}{\delta}}$, also eine logarithmische Spirale.

Die Kreisevolvente.

9) Wird ein Faden um einen Kreis gelegt, und in einem Punkte des Umfanges des Kreises befestigt, so beschreibt der andere Endpunkt bei der Abwickelung des Fadens eine Kurve, welche Kreisevolvente genannt wird. Die Gleichung dieser Kurve zu finden. Fig. 70.

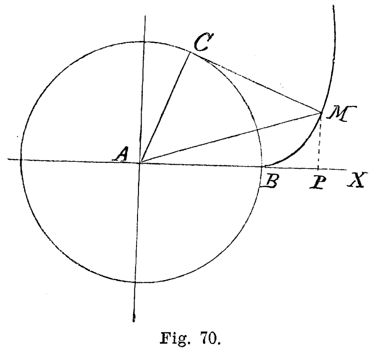


Fig. 70.

Nimmt man die Abscissenachse in der Richtung des vom Mittelpunkte A nach dem Anfangspunkte B der Evolvente gezogenen Halbmessers und A als Anfangspunkt der Koordinaten an, und sind $AP = x$, $MP = y$ die Koordinaten

---

solchen Teiles, dessen äusserste Leitstrahlen den Werten $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{8}$ entsprechen:

$$\frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{8}} [(\varphi + \sin 8\varphi)^2 - (\varphi - \sin 8\varphi)^2]\, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{8}} 4\varphi \sin 8\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{32} a^2 \pi.$$

Für das folgende Flächenstück ergiebt sich ebenso:

$$2a^2 \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \varphi . \sin 8\varphi\, d\varphi = -\tfrac{3}{32} a^2 \pi \text{ u. s. f.}$$

Diese Spiralen sind in den Lehrbüchern bisher nicht erwähnt. — Man kann ähnliche aus der Gleichung $r = a(\varphi \pm \cos\varphi)$ bilden. — Ferner ergeben die Gleichungen $r = a(\varphi + \operatorname{tg}\varphi)$ und $r = a(\varphi + \operatorname{cotg}\varphi)$ unstetige Spiralen, deren Untersuchung wir dem Leser überlassen. —

eines Punktes M der Evolvente, so ist die Tangente $CM = \widehat{BC}$. Der Halbmesser des Kreises sei a, $\angle BAC = \alpha$, dann findet man leicht:

$$CM = \widehat{BC} = a\alpha \quad \text{und}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\alpha + a\alpha \sin\alpha \\ y &= a\sin\alpha - a\alpha\cdot\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

Die Polarkoordinaten $AM = r$ und $\angle BAM = \varphi$ lassen sich auch als Funktionen von α ausdrücken. — Es ergiebt sich:

$$r = a\sqrt{1 + \alpha^2}$$

$$tg(\alpha - \varphi) = \alpha.$$

Jede Tangente des Kreises ist Normale und zugleich Krümmungshalbmesser der Evolvente; die Tangente der letzteren ist deshalb für jeden Punkt der Kurve leicht zu konstruieren. — Macht der Faden mehrere Windungen um den Kreis, so sieht man leicht, dass die Evolvente ebenfalls mehrere Windungen hat, und deshalb zu den Spiralen gehört.

Zur weiteren Übung mögen die Gleichungen einiger transcendenten Kurven dienen.

10) $y = a\sin x$ und $y = a\cos x$, Wellenlinien. — Die erstere geht durch den Anfangspunkt und trifft die Abscissenachse jedesmal, wenn $\sin x$ gleich Null wird. Bestimme die grössten und kleinsten Werte von y, und die Wendepunkte der Kurven. —

11) $y = a\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ und $y = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ebenfalls Wellenlinien, deren Wellenlängen nach dem Anfangspunkte zu immer kleiner werden. — Bestimme ebenfalls den näheren Verlauf dieser Kurven.

12) Als Beispiele für Polarkoordinaten mögen die Gleichungen

$$\alpha)\ r = a\sin 2\varphi$$

$$\beta)\ r = a\cos 2\varphi$$

$$\gamma)\ r = a\sin 3\varphi$$

dienen. Man bestimme aus den Gleichungen die Gestalten der Kurven. — Durch Umwandlung der Gleichungen in solche für rechtwinklige Koordinaten ergiebt sich, dass diese drei letzten zu den algebraischen Kurven höherer Ordnung gehören. —

13) Die Gleichung $$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

stellt die Kettenlinie dar. (Ein vollkommen biegsamer Faden, welcher in zwei Punkten befestigt ist, nimmt diese Gestalt an, wenn derselbe in vertikaler Ebene hängt). Es soll gezeigt werden, dass die Normale dieser Kurve ihrem Krümmungshalbmesser gleich ist.

VIII. Abschnitt.

A. Princip der reciproken Radien.*)

1) Zwei Punkte einer Ebene, welche in Bezug auf einen in derselben liegenden Kreis K eine solche Lage haben, dass jeder von ihnen auf der Polare des anderen liegt, heissen konjugierte Punkte. — Liegen zwei solche Punkte P_1 und P_2 auf derselben durch den Mittelpunkt c des Kreises gehenden Geraden, so werden sie zugeordnete Punkte genannt. Das Produkt der Entfernungen zweier zugeordneten Punkte von c ist dem Quadrat des Halbmessers des Kreises K gleich. (III, 104.)

Sind nun R und r die Entfernungen zweier zugeordneten Punkte vom Mittelpunkt c, und a der Halbmesser des Kreises K, so ist:

$$\left.\begin{aligned} Rr &= a^2 \\ R &= \frac{a^2}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

d. h. der Radius vektor eines beliebigen Punktes P_1 ist dem reciproken Wert desjenigen seines zugeordneten Punktes P_2 proportional.

Bewegt sich der Punkt P_1 auf irgend einer Kurve S_1 in der Ebene des Kreises K, so durchläuft auch P_2 eine Kurve S_2, deren Gestalt von S_1 abhängig und durch die letztere völlig bestimmt ist. S_1 und S_2 werden alsdann zugeordnete Kurven hinsichtlich des Kreises K genannt. Jede dieser Kurven kann man als eine Abbildung der anderen betrachten, und mit Rücksicht auf die zweite der obigen Gleichungen (1) nennt man dieses Abbildungsprincip das Princip der reciproken Radien. —

Ist die Polargleichung einer Kurve S_1 in Bezug auf den Mittelpunkt der reciproken Radien als Pol:

$$r = f(\varphi),$$

so ist offenbar die Polargleichung der zugeordneten Kurve S_2:

$$R = \frac{a^2}{f(\varphi)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

2) Die Polargleichung einer Geraden G, deren Abstand vom Pol k ist, heisst:

$$r = \frac{k}{\cos\varphi}, \quad \text{(s. II, 158)}$$

*) Über dieses Princip s. Reye „Geometrie der Lage", und C. F. Geiser „Einleitung in die Synthetische Geometrie".

wenn der feste Schenkel des veränderlichen Winkels φ in der vom Pol C auf G gefällten Senkrechten liegt. — Dieser Geraden ist in Bezug auf einen um C mit dem Halbmesser a gezeichneten Kreis, die Kurve:

$$R = \frac{a^2}{k} \cos \varphi$$

zugeordnet. — Diese Gleichung stellt einen Kreis vor (s. III, 98), dessen Mittelpunkt auf dem festen Schenkel des Winkels φ liegt. Da für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $R = 0$ ist, so geht der Kreis durch C. Man findet hieraus:

Jeder Geraden G ist in Bezug auf einen beliebigen Kreis K ein Kreis zugeordnet, welcher durch den Mittelpunkt von K geht. Schneidet G den Kreis K, so geht der zugeordnete Kreis durch diese Schnittpunkte, weil, wie leicht ersichtlich, alle Punkte von K sich selbst zugeordnet sind. — Der Mittelpunkt C der reciproken Radien ist dem unendlich fernen Punkte der Geraden G zugeordnet.

Umgekehrt ist jedem durch den Mittelpunkt C gehenden Kreise eine Gerade zugeordnet.

Geht die Gerade G durch den Mittelpunkt C der reciproken Radien, so wird der Durchmesser des zugeordneten Kreises unendlich. — Jede durch C gehende Gerade ist sich selbst zugeordnet.

3) Sind die durch C gehenden Kreise A und B (Fig. 71) den beiden Geraden α und β zugeordnet, so ist der zweite Durchschnittspunkt D der beiden Kreise auch dem Durchschnitt d der Geraden α und β zugeordnet. Die beiden Tangenten, welche in C die Kreise A und B berühren, sind den Geraden α und β parallel; A und B schneiden sich deshalb in C und folglich auch in D unter einem Winkel, welcher dem von α und β gebildeten Winkel gleich ist. —

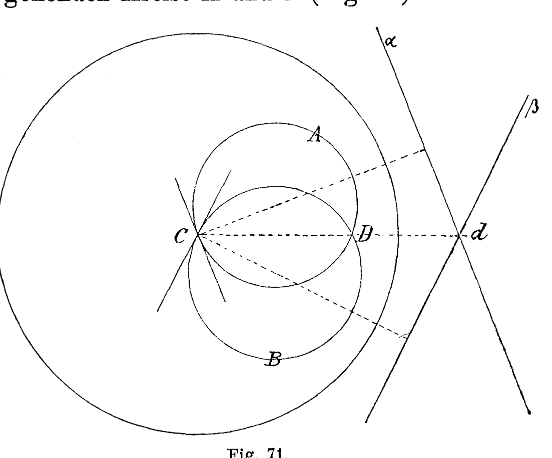


Fig. 71.

Einem von drei Geraden α, β, γ (Fig. 72) gebildeten Dreieck ist das von 3 Bögen der entsprechenden Kreise A, B, C gebildete Dreieck

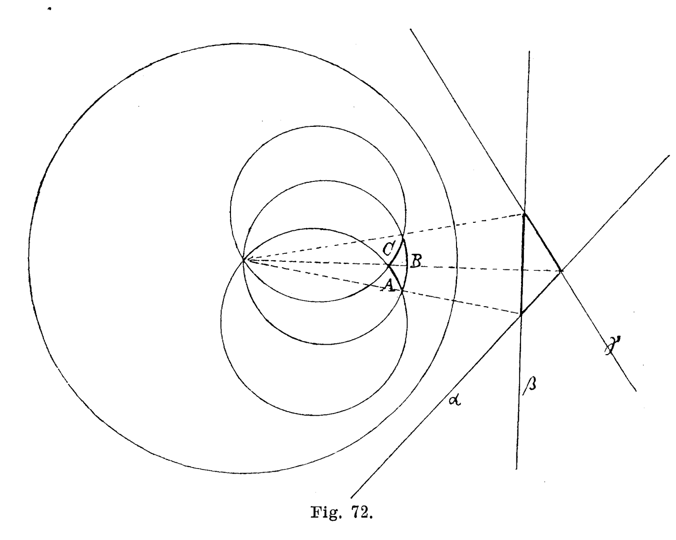


Fig. 72.

zugeordnet. — Die Kreise schneiden sich nach dem vorigen in den Ecken dieses Dreiecks unter denselben Winkeln wie die Geraden α, β und γ. Sind demnach die beiden zugeordneten Dreiecke unendlich klein, so kann man die Seiten des aus den Bögen A, B und C gebildeten Dreiecks als gerade Linien ansehen, und dasselbe ist, wegen der Gleichheit der Winkel dem zugeordneten Dreieck ähnlich. — Hieraus ergiebt sich:

Zwei einander zugeordnete Figuren A und a sind als konforme Abbildungen voneinander zu betrachten, derart, dass die unendlich kleinen Teile beider Figuren ähnlich sind. Zwei Paare einander zugeordneter Kurven beider Figuren schneiden sich unter gleichen Winkeln.

4) Die Polargleichung eines Kreises K, dessen Halbmesser k, und Koordinaten des Mittelpunktes α und β sind, heisst:

$$r^2 - 2(\alpha \cdot \cos\varphi + \beta \sin\varphi)\, r + \alpha^2 + \beta^2 - k^2 = 0 \quad \cdot \cdot \quad (3)$$

In Bezug auf einen um den Pol C gezeichneten Kreis vom Halbmesser a findet man die Polargleichung der dem Kreise K zugeordneten Kurve durch die Substitution: $r = \frac{a^2}{R}$ in (3), wodurch man erhält:

$$R^2 - \frac{2a^2(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)}{\alpha^2 + \beta^2 - k^2} R + \frac{a^4}{\alpha^2 + \beta^2 - k^2} = 0.$$

Diese Gleichung stellt wieder einen Kreis dar. Jede durch den Mittelpunkt der reciproken Radien gehende Gerade schneidet die beiden zugeordneten Kreise in zwei Paaren einander zugeordneter Punkte. Auf der von C an den einen Kreis gezogenen Tangente kann mithin nur ein dem Berührungspunkt zugeordneter Punkt des andern Kreises liegen, d. h. die Tangente berührt beide Kreise zugleich. — Daraus folgt

Einem beliebigen Kreise K ist durch reciproke Radien immer wieder ein Kreis zugeordnet. Der Mittelpunkt der reciproken Radien ist der äussere Ähnlichkeitspunkt beider Kreise. —

Schneidet der von C durch den Mittelpunkt des Kreises K gehende Strahl den gegebenen Kreis in zwei zugeordneten Punkten, so ist dieser Kreis sich selbst zugeordnet.

5) Die Polargleichung eines Kegelschnittes in Bezug auf einen Brennpunkt als Pol ist: $r = \frac{p}{1 + \xi \cos \varphi}$.

Dieselbe bedeutet, wenn $\xi = 1$, eine Parabel
$\xi < 1$, eine Ellipse
$\xi > 1$, eine Hyperbel.

Beschreibt man nun um den Brennpunkt einen Kreis K mit dem Halbmesser a, so heisst die Gleichung der dem Kegelschnitt in Bezug auf diesen Kreis zugeordneten Kurve:

$$R = \frac{a^2}{p}(1 + \xi \cos \varphi).$$

Diese Gleichung bedeutet nach (VII, B, 18) eine Epicykloide, deren Wälzungskreis dem festen Kreise gleich ist. Für $\xi = 1$ ist die Kurve eine Kardioide, für $\xi < 1$ eine gestreckte, und für $\xi > 1$ eine verschlungene Kardioide.

In den Figuren 73, 74, 75 ist die jedem Kegelschnitt zugeordnete Kurve in Bezug auf einen um den Brennpunkt B als Mittelpunkt beschriebenen Kreis K dargestellt. — Den unendlich fernen Punkten der Parabel und Hyperbel ist jedesmal der Mittelpunkt B der reciproken Radien zugeordnet. Zieht man von B aus den Strahl Bd (Fig. 73),

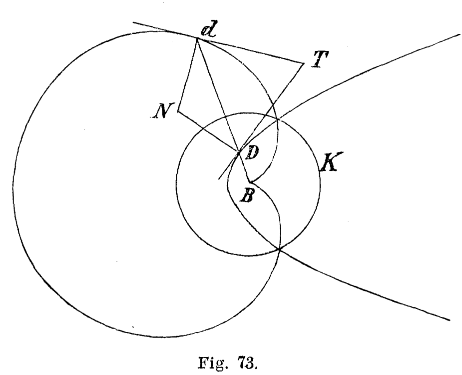


Fig. 73.

so schneidet derselbe die Parabel und die Kardioide in zwei zugeordneten Punkten D und d. Die Tangenten der beiden Kurven in diesen Punkten bilden nach (3) mit Dd gleiche Winkel (weil Dd sich selbst zugeordnet

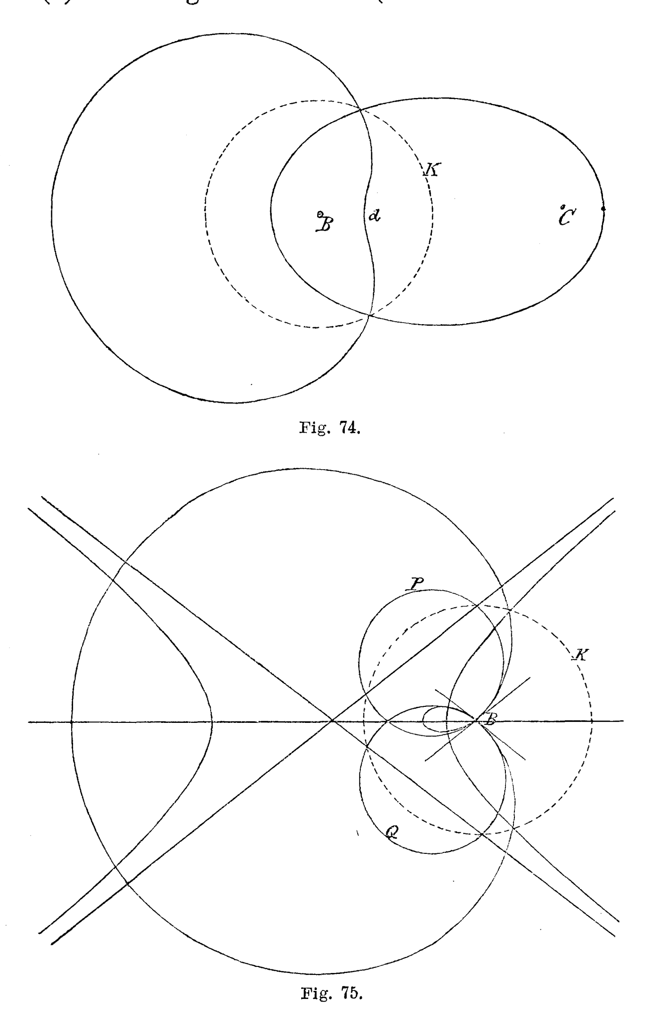


Fig. 74.

Fig. 75.

ist), und dasselbe ist auch mit den beiden Normalen DN und dN der Fall. Hiernach sind die Dreiecke DdT und DdN beide gleichschenklig. — Gleiches gilt für die beiden andern Kegelschnitte. — Die Tangenten in den Scheiteln der Kegelschnitte stehen senkrecht zur Hauptachse, folglich müssen auch die zugeordneten Kurven die letztere in den, den Scheiteln zugeordneten Punkten rechtwinklig durchschneiden. Hieraus

ergiebt sich noch, dass die der Ellipse zugeordnete Kurve in der Nähe des Punktes d zwei Wendepunkte haben wird. Die unendlich fernen Tangenten der Parabel sind parallel zur Abscissenachse, folglich müssen die Zweige der zugeordneten Kardioide in B die Abscissenachse berühren.

Den unendlich fernen Punkten der Hyperbel entspricht der Doppelpunkt B der zugeordneten verschlungenen Kardioide. — Die Tangenten der letzteren in B sind den Asymptoten parallel. Den Asymptoten sind die Kreise P und Q zugeordnet, welche die Kardioide in B berühren müssen. —

6) Der Mittelpunkt eines Kegelschnittes sei der Mittelpunkt reciproker Radien. Die Polargleichung der Ellipse ist: (s. IV, A 86)

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$$

und die der Hyperbel (s. IV, C, 47):

$$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Hiernach heissen die Polargleichungen der zugeordneten Kurven in Bezug auf einen Kreis vom Halbmesser k:

$$R = \frac{k^2}{ab} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \text{ für die Ellipse,}$$

und $$R = \frac{k^2}{ab} \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi} \text{ für die Hyperbel.}$$

Werden durch die Substitutionen $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ rechtwinklige Koordinaten eingeführt, so erhält man für die der Ellipse zugeordnete Kurve die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{k^4}{a^2 b^2} (a^2 y^2 + b^2 x^2) \quad \cdots \quad (\alpha)$$

und für die Kurve, welche der Hyperbel zugeordnet ist:

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{k^4}{a^2 b^2} (b^2 x^2 - a^2 y^2) \quad \cdots \quad (\beta)$$

woraus sich ergiebt, dass diese Kurven Fusspunktkurven sind, und zwar (α) die Fusspunktkurve einer Ellipse und (β) die einer Hyperbel, deren Halbachsen je $\frac{k^2}{a}$ und $\frac{k^2}{b}$ sind. (S. VII, A 23 und 24.)

Ist die Hyperbel gleichseitig, so heisst die Polargleichung der zugeordneten Kurve: $R = \frac{k^2}{a} \sqrt{\cos 2 \varphi}$, welche eine Lemniskate bedeutet. Die Asymptoten der Hyperbel sind zugleich die Tangenten der Lemniskate in dem Doppelpunkte derselben. —

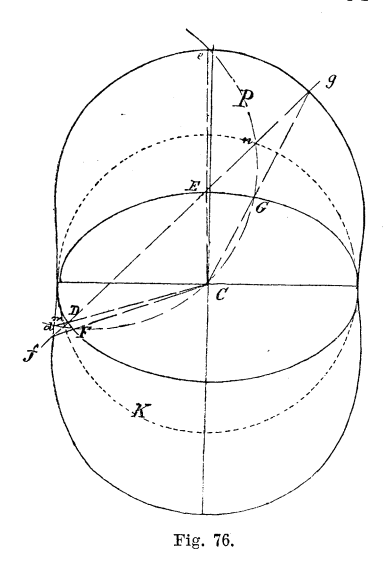


Fig. 76.

Ist die Ellipse gezeichnet gegeben, so lassen sich leicht beliebig viele Punkte der zugeordneten Kurve in Bezug auf den Kreis K bestimmen.

Einer beliebigen Sekante fg der Ellipse (Fig. 76) ist ein Kreis P zugeordnet, welcher durch den Mittelpunkt C, und durch die Schnittpunkte m und n der Sekante, mit dem Kreise K geht. — Schneidet die Sekante fg die Ellipse in D und E, so ziehe man von C aus durch D und E Strahlen, bis dieselben den Kreis P in d und e schneiden. Die Punkte d und e gehören der zugeordneten Fusspunktkurve an. — Ferner schneidet der Kreis P die Ellipse in F und G. — Zieht man also von C aus Strahlen durch diese

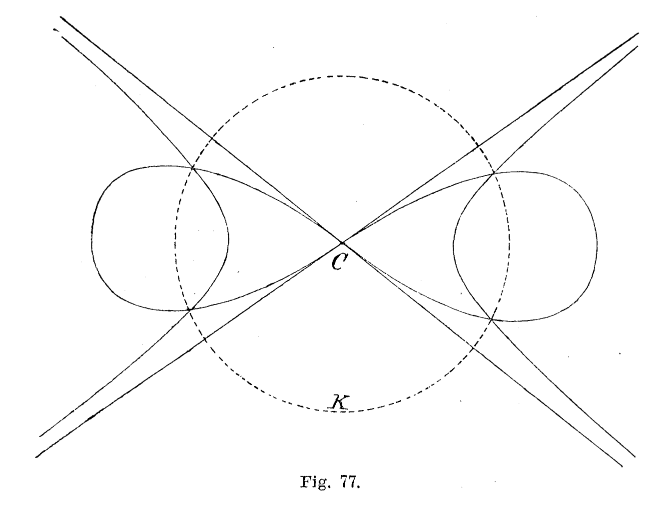


Fig. 77.

beiden Punkte, so treffen dieselben die P zugeordnete Gerade in den Punkten f und g, welche ebenfalls der Fusspunktkurve angehören. —

Dieselbe Konstruktion kann man zur Bestimmung einer Reihe von Punkten der einer Hyperbel zugeordneten Kurve anwenden, wenn die Hyperbel gezeichnet gegeben ist.

7) Welche Kurve ist der archimedischen Spirale in Bezug auf ihren Pol als Mittelpunkt reciproker Radien zugeordnet?

Antw. Die hyperbolische Spirale.

8) Durch welche Substitutionen ergiebt sich die Gleichung derjenigen Kurve, welche der gegebenen Kurve:

$$f(x, y) = 0$$

in Bezug auf den Anfangspunkt, als Mittelpunkt reciproker Radien, zugeordnet ist?

Antw. $$x = \frac{a^2 X}{X^2 + Y^2}, \quad y = \frac{a^2 Y}{X^2 + Y^2}.$$

9) Die allgemeine Form der Scheitelgleichung eines Kegelschnittes sei:

$$y = \sqrt{2px \pm qx^2}.$$

Wie heisst die Gleichung der zugeordneten Kurve, wenn der Scheitel Mittelpunkt reciproker Radien ist, in Bezug auf einen Kreis vom Halbmesser a?

Antw. $$Y = \sqrt{\frac{2pX^3 \pm qa^2X^2}{a^2 - 2pX}}.$$

Man diskutiere diese Gleichung für die einzelnen Fälle der Ellipse, Parabel und Hyperbel.

10) Der Mittelpunkt eines Kreises vom Halbmesser r ist um die Strecke k von dem Mittelpunkt C der reciproken Radien entfernt. Um C ist ein Kreis vom Halbmesser a gezeichnet; wie gross ist der Halbmesser des dem ersteren zugeordneten Kreises?

Antw. $$\frac{a^2 r}{k^2 - r^2}.$$

11) Zwei Kreise haben die Halbmesser r_1 und r_2 (Fig. 78). Die Entfernung ihrer Mittelpunkte ist e. — Welche Lage muss der Mittelpunkt reciproker Radien haben, wenn die zugeordneten Kreise gleich gross sein sollen?

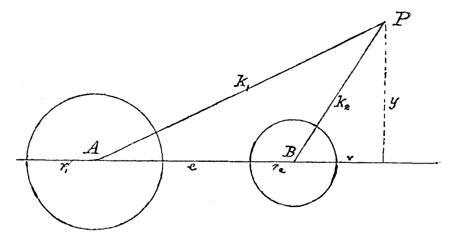


Fig. 78.

Antw. Hat der Mittelpunkt P der reciproken Radien die Abstände k_1 und k_2 von den Mittelpunkten A und B der beiden gegebenen Kreise, so hat man, wenn man (10) berücksichtigt:

$$\frac{a^2 r_1}{k_1{}^2 - r_1{}^2} = \frac{a^2 r_2}{k_2{}^2 - r_2{}^2}$$

oder $$k_1{}^2 r_2 - k_2{}^2 r_1 = r_1 r_2 (r_1 - r_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

Da k_1 und k_2 dieser Gleichung genügen müssen, so ist P veränderlich; man hat also noch den Ort des Punktes zu bestimmen. — Es sei B der Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten, AB Abscissenachse; dann folgt:

$$x^2 + y^2 = k_2{}^2$$
$$(x + e)^2 + y^2 = k_1{}^2.$$

Werden diese beiden Werte in die Gleichung (α) eingesetzt, so erhält man als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$[(x + e)^2 + y^2]\, r_2 - (x^2 + y^2)\, r_1 = r_1 r_2 (r_1 - r_2),$$

oder geordnet:

$$x^2 + y^2 - \frac{2 e r_2}{r_1 - r_2}\, x - \frac{e^2 r_2}{r_1 - r_2} + r_1 r_2 = 0,$$

woraus sich ergiebt, dass der gesuchte Ort ein Kreis ist, dessen

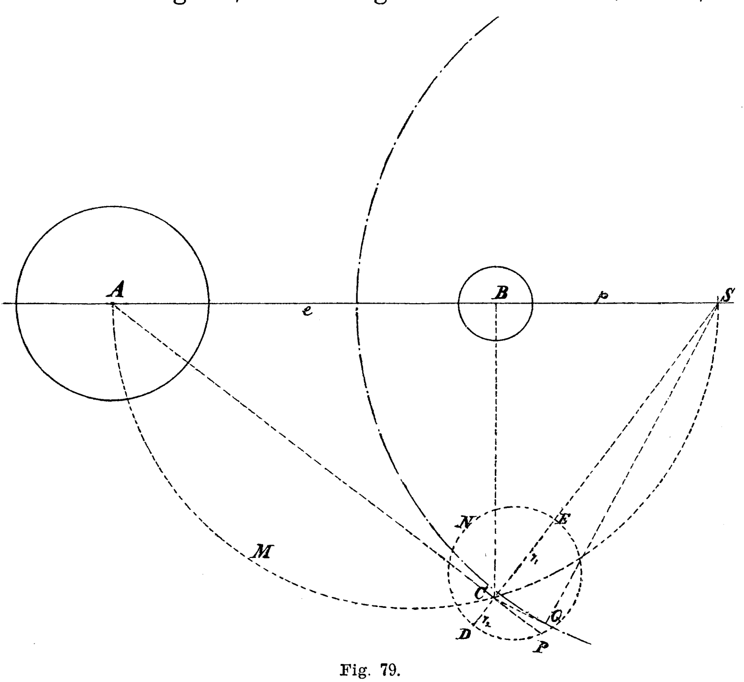


Fig. 79.

Mittelpunkt auf der Abscissenachse liegt. — Die Abscisse des Mittelpunktes ist aber $= \frac{e r_2}{r_1 - r_2}$, folglich ist der Mittelpunkt

(nach III, 89) der äussere Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise. Für den Halbmesser r findet man leicht: $r = \sqrt{p(p+e) - r_1 r_2}$, wenn $p = \frac{e r_2}{r_1 - r_2}$ die Entfernung des Ähnlichkeitspunktes von B ist. Hiernach lässt sich der Ort des Punktes P leicht konstruieren. —

Wenn S (Fig. 79) der Ähnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Kreise A und B ist, so zeichne man um AS als Durchmesser den Kreis M; errichte in B das Lot BC auf AS und ziehe CS, dann ist $CS^2 = p(p+e)$. Auf der Verlängerung von CS trage man $CE = r_1$ und $CD = r_2$ ab; zeichne um DE als Durchmesser den Kreis N, welcher AC in P schneidet; dann ist $CP^2 = r_1 r_2$.

Nun zeichne man mit dem Halbmesser CP um C einen Kreis und ziehe von S aus die Tangente SQ an denselben, dann ist $SQ = \sqrt{CS^2 - CQ^2} = \sqrt{CS^2 - CP^2} = \sqrt{p(p+e) - r_1 r_2}$, der gesuchte Halbmesser.

12) Es sind drei Kreise K_1, K_2, K_3 gegeben. Man soll den Mittelpunkt der reciproken Radien so bestimmen, dass die den Kreisen K_1, K_2, K_3 zugeordneten Kreise gleich gross werden. —

Leicht mit Hülfe von 11).

13) Einen Kreis zu konstruieren, welcher drei gegebene Kreise berührt. Diese Aufgabe lässt sich ebenfalls nach dem Princip der reciproken Radien lösen. — Man verwandelt die drei gegebenen Kreise K_1, K_2, K_3 in drei gleich grosse Kreise. Konstruiert man nun den Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher durch die drei Mittelpunkte der letzteren geht, so ist derselbe koncentrisch mit den beiden, welche diese Kreise von aussen oder innen berühren. — Die zugeordneten Kreise dieser Berührungskreise werden nun die gegebenen K_1, K_2 und K_3 berühren. — Ebenso leicht sind die übrigen Berührungskreise zu finden.

14) Drei gegebene Kreise K_1, K_2, K_3 in drei andere zu verwandeln, deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen.

Aufl. Man zeichne aus dem Radikalcentrum c (Fig. 80) der gegebenen Kreise denjenigen Kreis P, welcher die gegebenen Kreise rechtwinklig durchschneidet. — Wird nun ein beliebiger Punkt M im Umfange dieses Kreises als Mittelpunkt reciproker Radien angesehen, so wird P in eine Gerade G verwandelt, welche die K_1, K_2, K_3 zugeordneten Kreise k_1, k_2, k_3 rechtwinklig durch-

schneiden muss. — Das letztere ist nur möglich, wenn die Mittelpunkte von k_1, k_2 und k_3 auf der Geraden G liegen. —

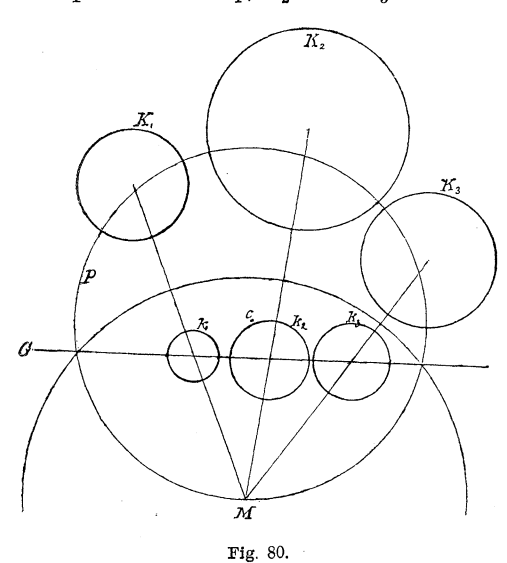


Fig. 80.

15) Zwei gegebene Kreise K_1 und K_2 in zwei koncentrische Kreise zu verwandeln.

Aufl. Diese Aufgabe ist nur lösbar, wenn die gegebenen Kreise K_1 und K_2 sich nicht schneiden. — Man konstruiert die Chordale C beider Kreise. Diese schneidet die Centrallinie in einem Punkte P; um diesen als Mittelpunkt wird der Orthogonalkreis von K_1 und K_2 gezeichnet. Für alle Kreise der Schar S, welche mit K_1 und K_2 die Gerade C als gemeinschaftliche Chordale haben, schneidet der Orthogonalkreis auf der Centrale die beiden Grenzpunkte G_1 und G_2 ab. — Jeder Kreis, welcher durch G_1 und G_2 geht, schneidet alle Kreise der Schar S unter rechtem Winkel. Wird nun einer der Grenzpunkte zum Mittelpunkt reciproker Radien genommen, so werden alle durch denselben gehende Kreise in gerade Linien verwandelt, welche die zugeordneten Kreise der Schar S rechtwinklig durchschneiden müssen. — Dies ist nur möglich, wenn S in eine Schar koncentrischer Kreise verwandelt wird, unter denen auch die K_1 und K_2 zugeordneten sind. —

Princip der reciproken Radien für den Raum.

16) Sind K und k zwei in Bezug auf den Kreis P einander zugeordnete Kreise, so beschreiben diese, wenn man sie um ihre gemeinschaftliche Centrallinie dreht, drei Kugelflächen K′, k′ und P′. — Jede durch den Mittelpunkt C der Kugelfläche P′ gehende Gerade schneidet K′ und k′ in zwei Paaren voneinander zugeordneten Punkten. — Geht der Kreis K durch C, so ist demselben eine Gerade G zugeordnet. — Bei der Drehung um die Centrallinie beschreibt K wieder eine Kugelfläche K′ und G eine Ebene, welche K′ zugeordnet ist. Hieraus folgt:

Im Raume ist jeder Ebene eine Kugelfläche zugeordnet, welche

durch den Mittelpunkt C der reciproken Radien geht. Jede durch C gehende Ebene ist sich selbst zugeordnet. Einer beliebigen Kugelfläche ist immer wieder eine Kugelfläche zugeordnet.

Aus (3) d. Abschn. schliesst man, dass zwei Ebenen sich unter demselben Winkel schneiden, wie die ihnen zugeordneten Kugelflächen. Einem von vier Ebenen gebildeten unendlich kleinen Tetraeder ist ein, von vier Kugelflächen eingeschlossenes ebenfalls unendlich kleines Tetraeder zugeordnet, welches dem ersteren ähnlich ist. — Da die Seitenflächen der beiden Tetraeder einander ebenfalls ähnlich sind, so folgt hieraus:

Durch reciproke Radien werden zwei einander zugeordnete Flächen derart aufeinander abgebildet, dass ihre kleinsten Teile einander ähnlich sind. Zwei auf der einen Fläche liegende Kurven schneiden sich unter demselben Winkel, wie die ihnen zugeordneten Kurven der anderen Fläche. —

Soll die einer beliebig im Raume liegenden Kreislinie Q zugeordnete Kurve bestimmt werden, so lege man durch Q zwei Kugelflächen M_1 und M_2. — Die den letzteren zugeordneten Kugelflächen m_1 und m_2 schneiden sich in einer Kreislinie q, welche der Q zugeordnet ist. —

Jeder beliebig im Raume liegenden Kreislinie Q ist deshalb immer wieder eine Kreislinie zugeordnet, welche sich in eine Gerade verwandelt, wenn Q durch den Mittelpunkt der reciproken Radien geht.

Abbildung einer Kugelfläche auf einer Ebene.

17) Nach 16) wird eine Kugelfläche K (Fig. 81) in eine Ebene E verwandelt, wenn der Mittelpunkt m der reciproken Radien auf der Kugelfläche liegt. — Einer Kreislinie der Kugelfläche K, deren Ebene durch m geht, ist eine Gerade zugeordnet, und jeder anderen Kreislinie auf K wieder eine Kreislinie der Ebene E. — Da zugeordnete Punkte von K und E auf demselben durch m gehenden Strahl liegen, so ist die K zugeordnete Figur eine Projektion von K auf E aus dem Projektionscentrum m.

Man benutzt diese Projektion zur Darstellung des Gradnetzes auf der Erdkugel. Liegt das Projektionscentrum m im Äquator, so nennt man die Abbildung des Gradnetzes auf der Ebene E eine stereographische Äquatorealprojektion. Von dieser ist in Fig. 81 derjenige Teil dargestellt, welcher der der Ebene E zugewendeten Hälfte der Kugelfläche K entspricht. — Die Projektionen der Parallelkreise und Meridiane bilden zwei Scharen sich rechtwinklig durchschneidender Kreise,

von denen letztere sich in den Projektionen der beiden Pole N und S schneiden. — Der Äquator erscheint als die Gerade AA_1, welche die

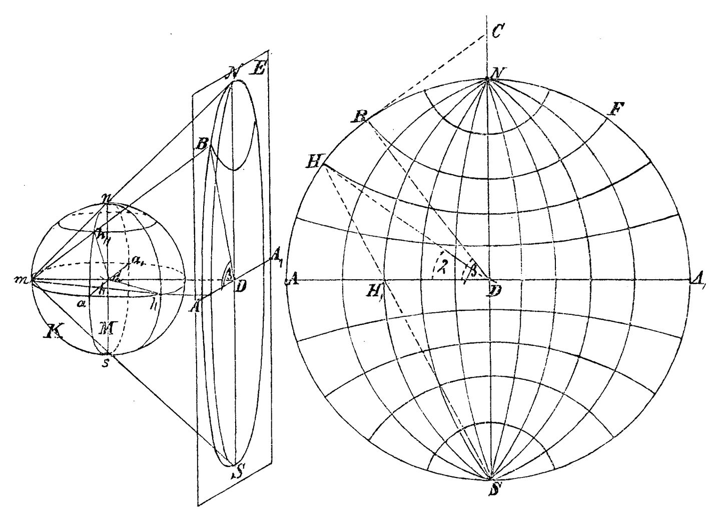


Fig. 81.

gemeinschaftliche Chordale der Parallelkreise ist, während die Pole N und S die Grenzpunkte dieser Schar sind. Um die Projektion eines Parallelkreises, dessen geographische Breite β ist, zu zeichnen, mache man in Fig. 81 $\angle ADB = \beta$, und ziehe in B die Tangente BC. Diese trifft den zum Äquator senkrechten Durchmesser NS in C. — Um C zeichnet man mit dem Halbmesser BC den Kreisbogen BF; derselbe schneidet den Kreis $SANA_1S$ rechtwinklig und ist deshalb die Abbildung des Parallelkreises von der geographischen Breite β.

Um die Abbildung eines Meridians von der geographischen Länge λ zu bestimmen, beachte man, dass die Projektion der Kugelfläche auf der Ebene M desjenigen Meridians, welcher zu E parallel ist, der Projektion auf E geometrisch ähnlich ist. — Die Projektion des Punktes h, welcher auf dem Äquator liegt und dessen geographische Länge λ ist, liegt im Durchschnitt h_1 des Strahles hm mit dem Durchmesser aa_1 (der Winkel adh ist gleich λ). Denkt man sich den Äquator um aa_1 in die Ebene M gedreht, so gelangt m nach s, und h in die Kreislinie an nach h_{11}; hieraus ergiebt sich sofort die Richtigkeit folgender Konstruktion: Man mache $\angle$ ADH gleich λ und ziehe HS; dann ist der Punkt H_1, in welchem HS die Gerade AA_1 schneidet, die Projektion desjenigen Punktes des Äquators, welcher die Länge λ hat. Durch

diesen Punkt und durch N und S geht die Abbildung des Meridians, welcher ebenfalls die geographische Länge λ hat. —

Betrachtet man die Abbildung AA_1 (Fig. 82) des Äquators als Abscissenachse, D als Anfangspunkt, so lassen sich die Koordinaten eines beliebigen Punktes P der Abbildung leicht durch geographische Länge und Breite des zugehörigen Punktes p der Kugelfläche bestimmen. Man lege durch den Strahl mP eine Ebene, welche senkrecht zur Ebene des Äquators steht und die letztere in mQ schneidet.

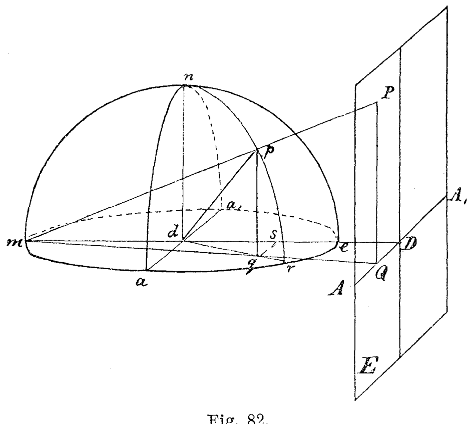


Fig. 82.

Zieht man nun pq und PQ senkrecht zu mQ, qs senkrecht zu Dm, und von d durch q den Radius dr, dann ist $\angle DdQ = \lambda$, $\angle pdq = \beta$, $DQ = x$ und $PQ = y$. Hierbei ist vorausgesetzt, dass e der Nullpunkt des Äquators ist. Der Halbmesser der abzubildenden Kugel sei a, und k der Abstand des Punktes m von der Ebene E. — Man findet nun leicht:

$$pq = a \sin\beta; \quad qs = a\cos\beta\sin\lambda, \quad ds = a\cdot\cos\beta\cos\lambda.$$

ferner
$$PQ : pq = mQ : mq = mD : ms$$
oder
$$y : a\sin\beta = k : a\,(1 + \cos\beta\cos\lambda)$$
also
$$y = \frac{k\sin\beta}{1+\cos\beta\cos\lambda}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

$$DQ : qs = Dm : sm \quad \text{oder:} \quad x : a\cos\beta\sin\lambda = k : a\,(1+\cos\beta\cos\lambda),$$

woraus folgt:
$$x = \frac{k\cos\beta\sin\lambda}{1+\cos\beta\cos\lambda}.$$

Hierdurch sind x und y als Funktionen von λ und β bestimmt. — *)

*) Da die kleinsten Teile der gegebenen Kugelfläche und ihrer Abbildung ähnlich sind, so müssen die durch einen Punkt der ersteren gehenden Kurvenelemente ihren zugeordneten Elementen der Abbildung proportioniert sein. — Das Verhältnis zweier einander zugeordneten Elemente heisst das Vergrösserungsverhältnis. —

Sind demnach p und p_1 zwei unendlich nahe Punkte der Kugelfläche, welche die geographischen Längen und Breiten (λ, β) und (λ + dλ), (β + dβ) haben,

18) Man konstruiere die stereographische Polarprojektion des Gradnetzes der Erdkugel, welche man erhält, wenn der Mittelpunkt der reciproken Radien in einem der Pole angenommen wird.

Für die Koordinaten der Abbildung desjenigen Punktes, welcher die geographische Länge λ und Breite β hat, findet man:

$$x = \frac{k \cos\beta \cos\lambda}{1 + \sin\beta}, \quad y = \frac{k \cos\beta \sin\lambda}{1 + \sin\beta}.$$

19) Liegt der Mittelpunkt m der reciproken Radien auf der Kugelfläche beliebig zwischen dem Äquator und einem Pole, so ist die der Kugelfläche zugeordnete Ebene parallel der Tangentialebene im Punkte m. Da in Bezug auf die Erdkugel diese Tangentialebene den Horizont des Punktes m bildet, so pflegt man die Projektion der Kugelfläche in diesem Falle die stereographische Horizontalprojektion derselben zu nennen. —

Man konstruiere auch hierfür die Abbildung des Gradnetzes.

---

dann ist:

$$pp_1 = \sqrt{a^2 \cos^2\beta\, d\lambda^2 + a^2 d\beta^2}.$$

Den Punkten p und p_1 sind zugeordnet $P(x, y)$ und $P_1(x + dx,\ y + dy)$ der Abbildung, und es ist:

$$PP_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Da aber x und y Funktionen von λ und β sind, so folgt:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta, \text{ und } dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta.$$

Für die Länge des Elementes PP_1 ergiebt sich hieraus die Formel:

$$PP_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2\right] d\beta^2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta}\right) d\lambda . d\beta}$$

und hieraus das Verhältnis von zwei einander zugeordneten Elementen:

$$\frac{PP_1}{pp_1} = \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2\right] d\beta^2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta}\right) d\lambda . d\beta}{a^2 \cos^2\beta \,.\, d\lambda^2 + a^2 d\beta^2}}.$$

Da das Vergrösserungsverhältnis für alle durch p und P gehenden Elemente konstant ist, so kann man pp_1 in der Richtung des Meridians wählen; dann ist bei der Differentiation λ als Konstante anzusehen, während β konstant bleibt, wenn pp_1 in einem Parallelkreis liegt. Für diese beiden Annahmen erhält man:

$$\frac{PP_1}{pp} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2}}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{PP_1}{pp_1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{a \cos\beta}.$$

Bestimmt man die partiellen Differentialquotienten von x und y nach λ und β aus den oben für x und y gefundenen Werten, so erhält man für das Vergrösserungsverhältnis die Formel:

$$\frac{PP_1}{pp_1} = \frac{k}{a(1 + \cos\beta \cos\lambda)}.$$

Die Cyklide.

20) Diejenige Fläche, welche einer geraden Cylinderfläche mit kreisförmigem Querschnitt in Bezug auf einen Punkt m als Mittelpunkt reciproker Radien zugeordnet ist, wird Cyklide genannt. — Jeder Seitenlinie der Cylinderfläche entspricht ein Kreis, welcher durch m geht, und in diesem Punkte von einer Geraden berührt wird, welche den Seitenlinien der Cylinderfläche parallel ist. Den senkrecht zu den Seitenlinien stehenden Kreisen der Cylinderfläche sind wieder Kreislinien zugeordnet, welche die vorige Schar rechtwinklig durchschneiden. Liegt m auf der Achse der Cylinderfläche, so sind die den Seitenlinien zugeordneten Kreise einander gleich, es entsteht eine Rotationscyklide (Ringfläche). Liegt m ausserhalb der Cylinderfläche, so erhält die

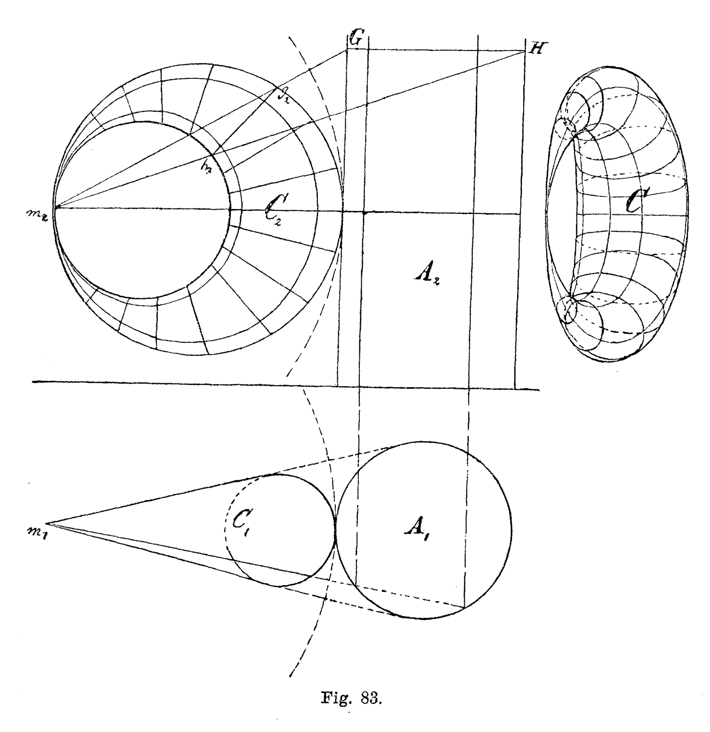
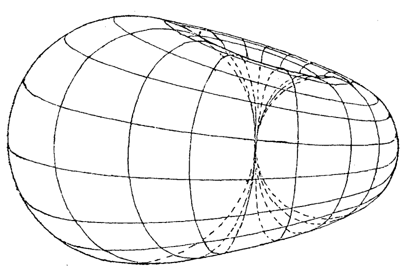


Fig. 83.

Cyklide die in Fig. 83 dargestellte Form. A_1 und A_2 sind Horizontal- und Vertikalprojektion der Cylinderfläche; m_1 und m_2 ebenso die Projektionen des Mittelpunktes der reciproken Radien. Die Kugel, auf welche die Cylinderfläche und die ihr zugeordnete Cyklide bezogen sind, berührt in der Figur die Cylinderfläche. C_1 und C_2 sind nun die beiden

Projektionen der Cyklide, welche in C der Anschaulichkeit wegen noch einmal in schräger Ansicht dargestellt ist. — In der Horizontalprojektion erscheinen die den Seitenlinien der Cylinderfläche zugeordneten Kreise als gerade Linien, welche durch m_1 gehen; in der Vertikalprojektion erscheinen dieselben als Ellipsen. Nur der grösste und der kleinste Kreis zeigen sich in der letzteren in wahrer Gestalt. — Die zweite Schar der Kreislinien erscheint in der Vertikalprojektion durch eine Schar gerader Linien dargestellt. — So bedeutet z. B. die Gerade $g_2 h_2$ die Vertikalprojektion der dem Kreise GH der Cylinderfläche zugeordneten Kreislinie; man findet dieselbe leicht mit Hülfe der Strahlen m_2 G und m_2 H.


Fig. 84.

Liegt m innerhalb der Cylinderfläche, so nimmt die Cyklide die Form Fig. 84 an, und liegt m auf der Cylinderfläche, so erstreckt sich die Cyklide ins Unendliche (Fig. 85). — Sie hat mit der Cylinderfläche in diesem Falle die durch m gehende Seitenlinie AB, welche sich selber entspricht, gemeinschaftlich. Dem durch m gehenden kreisförmigen Querschnitte der Cylinderfläche ist ebenfalls eine Gerade CD, welche AB rechtwinklig kreuzt, zugeordnet. — In AB berührt die sich selbst zugeordnete Tangentialebene Cylinderfläche und Cyklide.

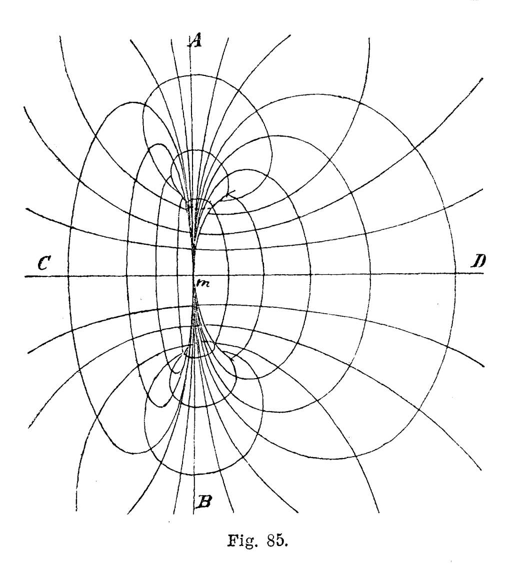


Fig. 85.

Für alle drei Formen lassen sich folgende Eigenschaften der Cyklide aufstellen, welche sich aus den entsprechenden Eigenschaften der Cylinderfläche ohne weiteres ergeben, wenn man statt der Seitenlinien, Kreise oder Ebenen bei der Cylinderfläche die ihnen zugeordneten Gebilde bei der Cyklide nimmt.

1) Durch je zwei Seitenlinien der Cylinderfläche lässt sich eine Ebene legen.

2) Die Cylinderfläche wird von unzählig vielen Ebenen in Seitenlinien und von unzählig vielen Kugelflächen in Kreislinien berührt. — Jede der Kugelflächen berührt jede der Tangentialebenen.

Durch je zwei Kreislinien einer Schar auf der Cyklide lässt sich eine Kugelfläche legen.

Die Cyklide wird von 2 Scharen unzählig vieler Kugelflächen in Kreislinien berührt. — Jede Kugelfläche der einen Schar berührt jede Kugelfläche der anderen Schar.

Man beweise noch folgenden Satz:

Die Ebenen der Schar von Kreislinien der Cyklide, welche den Kreisschnitten der Cylinderfläche zugeordnet sind, schneiden sich in einer Geraden, welche in derjenigen Symmetrieebene der Cyklide liegt, die senkrecht zu den Seitenlinien der Cylinderfläche steht.

21) Es seien E_1, E_2, E_3 (Fig. 86) drei senkrecht zu einander stehende Ebenen, AX, AY, AZ die drei Durchschnittslinien derselben. In AY liegt der Durchmesser $AB = 2a$ eines Kreises K, welcher mit der Ebene E_1 einen Winkel von 45° bildet. — Dreht man nun den Kreis um die Achse AZ so, dass der Durchmesser AB die Ebene E_1 durchläuft, so wird der Schnittpunkt des Kreises mit der Ebene E_2 eine Kurve auf E_2 beschreiben, deren Gleichung bestimmt werden soll. —

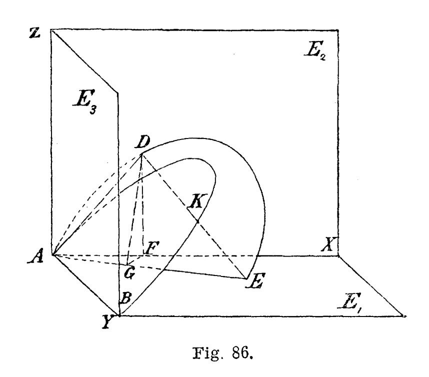


Fig. 86.

ADE sei eine beliebige Lage des beweglichen Kreises, D der Durchschnitt desselben mit der Ebene E_2. Ferner seien $AD = r$ und $\angle DAX = \varphi$ die Polarkoordinaten des Punktes D. Zieht man $DG \perp AE$, $DF \perp AX$ und verbindet F mit G, so ist nach Voraussetzung $\angle DGF = 45°$. $\triangle ADE$ ist rechtwinklig, und wenn $\angle DAE = \alpha$ gesetzt wird, so ist:
$$r = 2a \cos\alpha.$$

Ferner ist $DF = DG\sqrt{\frac{1}{2}}$ oder $DG = DF \cdot \sqrt{2}$; $r \sin\varphi = DF$, $r \sin\alpha = DG = DF\sqrt{2}$, folglich $\sin\alpha = \sqrt{2} \cdot \sin\varphi$. Hieraus ergiebt sich leicht $\cos\alpha = \sqrt{1 - 2\sin^2\varphi} = \sqrt{\cos 2\varphi}$. Setzt man diesen Ausdruck in den ersten für r gefundenen Wert ein, so folgt als Polargleichung der gesuchten Kurve: $r = 2a\sqrt{\cos 2\varphi}$, welche eine Lemniskate bedeutet. (VII, A, 8).

Die von dem Umfang des Kreises K bei der Drehung um die Achse AZ beschriebene Fläche F wird deshalb auch von einer Lemniskate durchlaufen, deren Ebene beständig durch die Achse AZ geht. — Es ist leicht ersichtlich, dass auf der Fläche (Lemniskatoid) noch eine zweite Schar von Kreisen existiert, welche ebenfalls unter 45° gegen die Ebene E_1 geneigt sind. — Je zwei Kreise der beiden Scharen, welche einen Durchmesser gemeinschaftlich haben, durchschneiden sich unter rechtem Winkel. Durch die Umfänge zweier solchen Kreise lässt sich eine Kugelfläche legen, welche in dem einen Durchschnitte derselben die Fläche F berührt. — Eine dritte Schar von Kreislinien auf F steht senkrecht zur Achse AZ. — Die Fläche F wird daher von einer zweiten Schar von Kugelflächen berührt, deren Mittelpunkte auf AZ liegen.

Nimmt man nun A (Fig. 87) zum Mittelpunkte reciproker Radien, so verwandelt sich die in der Ebene E_2 liegende Lemniskate in eine gleichseitige Hyperbel und die Fläche F wie leicht ersichtlich in eine solche, welche durch die Umdrehung der Hyperbel um die Achse AZ erzeugt wird (Rotations-Hyperboloid). — Denkt man sich F durch

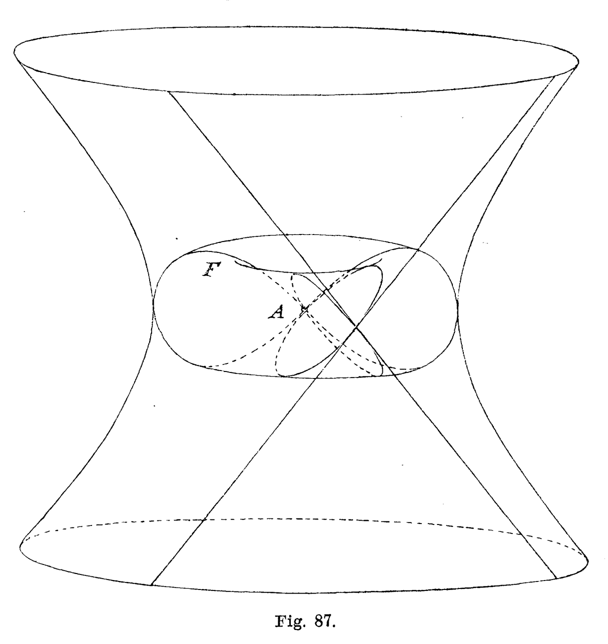


Fig. 87.

Drehung des Kreises K entstanden, so ist jeder Lage des beweglichen Kreises eine Gerade zugeordnet, welche auf dem Hyperboloid liegen muss. — Es giebt hiernach auf dem Hyperboloid zwei Scharen von

geraden Linien, welche, den gemachten Voraussetzungen zufolge, sich rechtwinklig durchschneiden müssen. — Die Ebene, welche durch zwei dieser, verschiedenen Scharen angehörenden Linien geht, berührt in dem Schnittpunkte der Geraden das Hyperboloid. —

22) Man untersuche diejenige Fläche, welche einer geraden Kegelfläche mit kreisförmigem Querschnitt zugeordnet ist, wenn der Mittelpunkt der reciproken Radien auf der Achse der Kegelfläche, oder innerhalb oder ausserhalb, oder auf der Kegelfläche liegt. Diese Fläche gehört auch zu den Cykliden.

23) Allgemein ist eine Cyklide diejenige Fläche, welche von einer veränderlichen Kugelfläche, welche drei gegebene Kugelflächen berührt, eingehüllt wird. Man zeige, dass die in den Fig. 83, 84, 85 dargestellten besondere Fälle derselben sind und beweise, dass eine Cyklide durch reciproke Radien wieder in eine Cyklide verwandelt wird.

24) Drei Kugelflächen durch reciproke Radien in solche Kugelflächen zu verwandeln, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. (s. 14 d. Abschn.)

25) Zwei Kugelflächen durch reciproke Radien in zwei konzentrische Kugelflächen zu verwandeln. (s. 15 d. Abschn.)

26) Ebenso zwei gegebene Kugelflächen in zwei gleich grosse Kugelflächen zu verwandeln.

27) Drei gegebene Kugelflächen durch reciproke Radien in drei gleich grosse Kugelflächen zu verwandeln.

B. Polarfiguren.

1) Zu jedem Punkte P einer Ebene kann man in Bezug auf einen in derselben liegenden Kreis M eine, und nur eine Polare konstruieren. Bewegt sich P stetig auf einer Kurve C, so bewegt sich seine Polare ebenfalls stetig, und umhüllt eine andere Kurve C_1, deren Gestalt von C abhängig ist. Man nennt dieselbe die Polarfigur von C; der Kreis M heisst der Polarisationskreis.

Die Polargleichung der Kurve C sei:

$$R = f(\varphi) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

und $P(R, \varphi)$ irgend ein Punkt derselben. Der Halbmesser eines um den Pol A (auf welchen die Gleichung (1) bezogen ist) als Mittelpunkt gezeichneten Polarisationskreises sei a, dann ist die Normalgleichung der zu P gehörigen Polare in rechtwinkligen Koordinaten:

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - r = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$



wenn r den Abstand der Geraden von A bedeutet und die Abscissenachse mit dem festen Schenkel des veränderlichen Winkels φ zusammenfällt. — Da die Gerade (2) Polare von P ist, so folgt:

$$Rr = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Koordinaten der Geraden (2) sind nun:

$$u = -\frac{1}{r}\cos\varphi, \quad v = -\frac{1}{r}\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Eliminiert man aus (1), (3) und den beiden Gleichungen (4) die Grössen R, r, φ, so erhält man eine Gleichung zwischen den Veränderlichen u und v, welche von den Koordinaten aller Geraden (2) erfüllt sein muss. Dies ist aber die Gleichung der Polarfigur von C in Linienkoordinaten.

Aus (4) ergiebt sich leicht:

$$\frac{1}{r^2} = u^2 + v^2$$

und wenn man dies in (3) einsetzt, so erhält man:

$$R = a^2\sqrt{u^2 + v^2}$$

oder

$$f(\varphi) = a^2\sqrt{u^2 + v^2}.$$

Aus der ersten Gleichung (4) folgt:

$$\cos\varphi = -ur = -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Man erhält demnach die Gleichung der Polarfigur von C auch durch Elimination von φ aus den beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} f(\varphi) = a^2\sqrt{u^2 + v^2} \\ \cos\varphi = -\dfrac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

2) Die Gleichung der Polarfigur der Geraden:

$$R = \frac{k}{\cos\varphi}$$

ergiebt sich hiernach aus den beiden Gleichungen:

$$a^2\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{k}{\cos\varphi}$$

$$\cos\varphi = -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Durch Elimination von $\cos\varphi$ erhält man hieraus:

$$a^2u + k = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Punktes, dessen Koordinaten $\frac{a^2}{k}$ und 0 sind, und es folgt hieraus der schon früher bewiesene Satz:

Die Polaren aller Punkte einer Geraden gehen durch den Pol der Geraden.

3) Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in Bezug auf einen Brennpunkt B als Pol, ist:

$$R = \frac{p}{1 + \xi \cos \varphi}.$$

Zeichnet man um B als Mittelpunkt einen polarisierenden Kreis mit dem Halbmesser a, so heissen die Gleichungen (5):

$$a^2 \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{p}{1 + \xi \cos \varphi}$$

$$\cos \varphi = - \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Durch Elimination von $\cos \varphi$ findet man hieraus:

$$\frac{a^4}{p^2}(u^2 + v^2) = \left(\frac{a^2 \xi}{p} u + 1\right)^2,$$

welches die Gleichung eines Kreises in Linienkoordinaten ist. —

Die Polarfigur des Kegelschnittes ist also ein Kreis, dessen Mittelpunktskoordinaten $\frac{a^2}{p}\xi$ und 0 sind. Der Halbmesser ist $\frac{a^2}{p}$ (s. III, 80).

Bei der Parabel, für welche $\xi = 1$ ist, geht dieser Kreis durch den Brennpunkt.

4) Ist C_1 die Polarkurve einer gegebenen Kurve C, so ist auch umgekehrt C die Polarkurve von C_1.

Beweis. Es sei p_1 ein Punkt der Kurve C, Fig. 88, und P_1 seine Polare in Bezug auf irgend einen Kreis K. — Einem zweiten Punkte p_2 auf C, welcher unendlich nahe bei p_1 liegt, entspreche die Polare P_2. Die letztere weicht dann ebenfalls unendlich wenig von P_1 ab. Der Schnittpunkt m von P_1 und P_2 ist nun ein Punkt der Kurve C_1. — Es ist aber m der Pol der durch p_1 und p_2 gehenden Geraden γ, welche als Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte der Kurve C eine Tangente der letzteren ist. — Einem beliebigen Punkte m der Kurve C_1 ent-

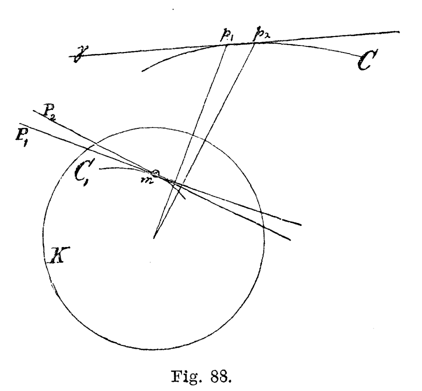


Fig. 88.

spricht daher eine Tangente von C als Polare, wodurch der Satz bewiesen ist. —

5) Es sei der Kreis M (Fig. 89) die Polarfigur der Parabel in Bezug auf den um den Brennpunkt B als Mittelpunkt gezeichneten Kreis K; ferner die Kardioide C die zugeordnete Kurve hinsichtlich desselben Kreises. — Ist nun P ein beliebiger Punkt der Parabel, so schneidet BP die Kardioide in dem zugeordneten Punkte p. — Durch den letzteren geht aber die Polare pq des Punktes P, welche zugleich Tangente des Kreises M ist. — Da nun pq eine beliebige Tangente von M, und Bp eine von B auf dieselbe gefällte Senkrechte ist, so folgt:

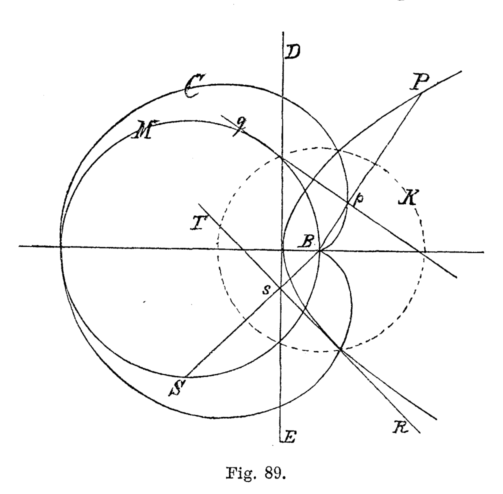


Fig. 89.

Der Ort der Fusspunkte aller zu den Tangenten eines Kreises aus einem Punkte des Umfanges gefällten Lote ist eine Kardioide.

Betrachtet man umgekehrt die Parabel als Polarfigur des Kreises M, dann entspricht einem Punkte S auf M die zugehörige Polare TR als Tangente der Parabel. — Die Gerade BS steht senkrecht zu TR, und trifft letztere in dem Punkte s, welcher S hinsichtlich des Kreises K zugeordnet ist. — Demnach liegt s auch auf der dem Kreise M in Bezug auf K zugeordneten Kurve. Die letztere ist aber (weil M durch B geht) die gemeinschaftliche Sekante von K und M, welche zugleich die Scheiteltangente DE der Parabel ist. Hieraus folgt:

Der Ort der Fusspunkte aller vom Brennpunkte einer Parabel auf die Tangenten derselben gefällten Lote ist die Scheiteltangente der Parabel.

6) Polarisiert man die Ellipse E (Fig. 90) in Bezug auf den um den Brennpunkt B gezeichneten Kreis K und ist M die Polarfigur, ferner die Epicykloide C die der Ellipse E zugeordnete Kurve hinsichtlich K, dann findet man leicht: Wenn P ein beliebiger Punkt der Ellipse, und die Tangente pq des Kreises M die zugehörige Polare ist, so muss der Schnittpunkt p von BP und pq auf C liegen. — Bei der

Hyperbel findet dasselbe statt, nur liegt in diesem Falle B ausserhalb M. — Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich der Satz:

Der Ort der Fusspunkte aller Lote, welche von einem beliebigen Punkte auf alle Tangenten eines gegebenen Kreises gefällt werden können, ist eine Epicykloide, deren Wälzungskreis dem festen Kreise gleich ist. Liegt der Punkt innerhalb des Kreises, so ist der Ort eine gestreckte Epicykloide; liegt er ausserhalb, eine verschlungene Epicykloide. — Die Kurve wird eine Kardioide, wenn der Punkt auf dem Kreise liegt.

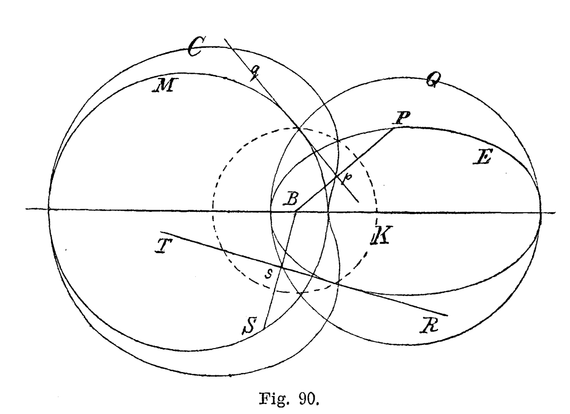


Fig. 90.

Ist S ein Punkt der Polarfigur M der Ellipse, und die Tangente TR der letzteren die zugehörige Polare, dann ist der Schnittpunkt s von BS und TR dem Punkte S zugeordnet. — S liegt deshalb auf der dem Kreise M hinsichtlich K zugeordneten Kurve. — Die letztere ist aber der um die grosse Achse der Ellipse als Durchmesser gezeichnete Kreis Q. Bei der Hyperbel findet gleiches statt, folglich ergiebt sich:

Der Ort der Fusspunkte der von einem Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel auf alle Tangenten derselben gefällten Lote ist der um die Hauptachse als Durchmesser gezeichnete Kreis.

7) Es seien a, b, c (Fig. 91) drei Tangenten eines Kegelschnittes, und A, B, C die diesen Tangenten entsprechenden Punkte der Polarfigur K des gegebenen Kegelschnittes, welche auf den um den Brennpunkt F gezeichneten Kreis M bezogen ist. — Dann sind die Schnittpunkte α, β, γ der Tangenten die Pole der Verbindungsgeraden AB, BC und AC; folglich stehen $F\alpha$ und $F\beta$ senkrecht zu AB bez. BC, und die Summe der Winkel ABC und $\alpha F \beta$ beträgt zwei Rechte. Giebt man der Tangente b eine andere Lage, etwa b_1, so rückt ihr Pol nach B_1, und die Schnittpunkte α_1 und β_1 von b_1 mit a und c sind jetzt die Pole der Geraden AB_1 und B_1C. — Nun steht $F\alpha_1$ wieder senkrecht zu AB_1 und $F\beta_1$ senkrecht zu B_1C; folglich ist

$\angle AB_1C + \angle \alpha_1 F \beta_1 = 2R$. Da aber $\angle ABC = \angle AB_1C$ ist, so ist auch $\angle \alpha F \beta = \angle \alpha_1 F \beta_1$, d. h.:

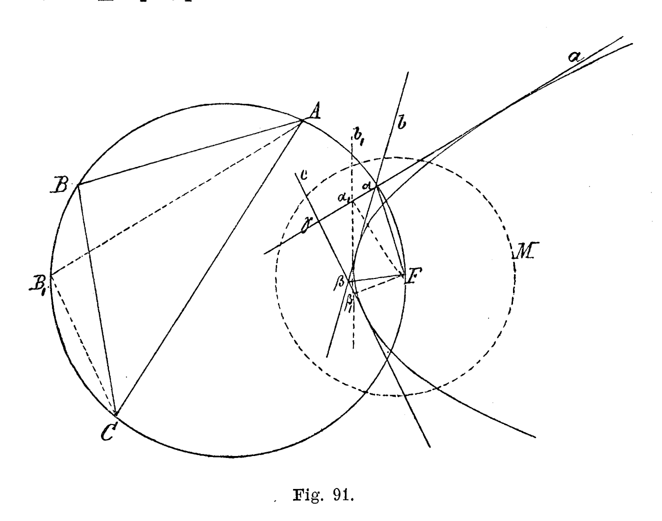


Fig. 91.

Der Abschnitt einer beweglichen Tangente eines Kegelschnittes, welcher zwischen zwei festen Tangenten desselben liegt, erscheint von einem Brennpunkte aus unter konstantem Winkel.

8) Liegen die Berührungspunkte A und B zweier Tangenten AC und BD (Fig. 92) der Polarfigur eines Kegelschnittes in den Endpunkten eines Durchmessers, so entsprechen den Punkten A und B die Tangenten a und b des Kegelschnittes, als Polaren derselben. Umgekehrt entsprechen den Berührungspunkten c und d dieser Tangenten die in diesem Falle parallelen Tangenten AC und BD der Polarfigur. Da nun Fc und Fd senkrecht zu AC und BD stehen, so ist cFd eine Gerade. Ferner ist der Durchschnitt α der Tangenten a und b der Pol der Geraden AB. Dreht

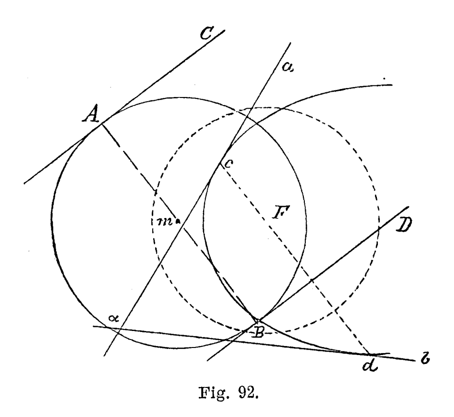


Fig. 92.

man AB um den Mittelpunkt m, so bewegt sich α auf der Polare von m und cd dreht sich um den Brennpunkt F. Hieraus folgt:

Der Ort des Durchschnittes zweier Tangenten eines Kegelschnittes, deren Berührungssehne durch einen Brennpunkt geht, ist eine Gerade.

9) Sind A_1, A_2 . . . A_6 (Fig. 93) sechs Tangenten eines Kegelschnittes, so entsprechen denselben sechs Punkte a_1, a_2 . . . a_6 der Polarfigur. — Nun durchschneiden sich die gegenüberliegenden Seitenpaare:

$a_1 a_2$ und $a_4 a_5$
$a_2 a_3$,, $a_5 a_6$
$a_3 a_4$,, $a_6 a_1$

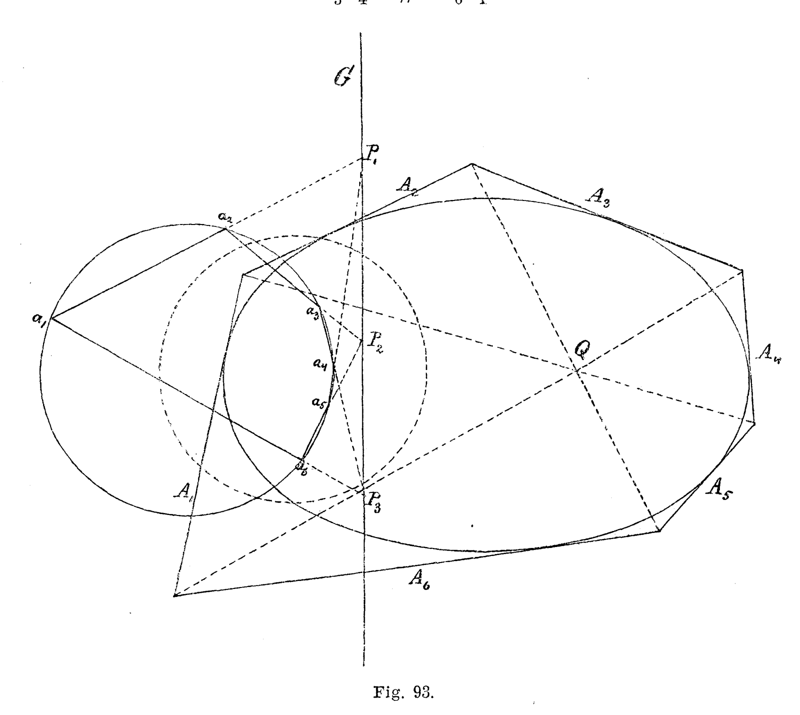


Fig. 93.

in drei Punkten P_1, P_2, P_3, welche nach dem Pascal'schen Satze auf einer Geraden G liegen. — Folglich gehen die Polaren dieser Punkte, nämlich die Hauptdiagonalen des von den Tangenten des Kegelschnittes gebildeten Sechsecks durch einen Punkt Q, den Pol jener Geraden G. — Auf diese Weise erhält man den Satz von Brianchon. — Setzt man umgekehrt den letzteren als bekannt voraus, so kann man ebenso durch Polarisation den Satz von Pascal nachweisen.

10) Die Polarfigur einer Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf einen um die Hauptachse als Durchmesser gezeichneten Kreis zu finden.

Antw. Für die Polarfigur der Ellipse erhält man die Gleichung:

$$b^2 u^2 + a^2 v^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

und für die Polarfigur der Hyperbel:

$$b^2 u^2 - a^2 v^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Die Polarfigur der Ellipse ist demnach wieder eine Ellipse und die der Hyperbel ebenfalls eine Hyperbel. — Die Hauptachsen sind, wie man leicht aus den Gleichungen erkennt: $\frac{a^2}{b}$ und a.

11) Nachzuweisen, dass die Polarfigur eines Kegelschnittes in Bezug auf einen beliebigen Kreis wieder ein Kegelschnitt ist. —

12) Haben drei Kegelschnitte einen Brennpunkt gemeinschaftlich, so liegen die Schnittpunkte der Tangenten, welche je zwei dieser Kegelschnitte berühren, auf einer Geraden.

Die Apollonische Berührungsaufgabe.

13) Um den Kreis P zu konstruieren, welcher drei gegebene Kreise K_1, K_2 und K_3 berührt, ist zu beachten, dass der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher nur K_1 und K_2 berührt, eine Hyperbel ist, deren Brennpunkte die Mittelpunkte von K_1 und K_2 sind. (IV, C, 63.) Polarisiert man diese Hyperbel in Bezug auf K_1, so erhält man nach (3) einen Kreis Q_1, welcher leicht zu konstruieren ist. — Die Polare des Mittelpunktes von P muss demnach Q_1 berühren. — Man kann nun einen zweiten Kreis Q_2 konstruieren, wenn man diejenige Hyperbel polarisiert, welche der Mittelpunkt eines K_1 und K_3 berührenden Kreises beschreibt. — Q_2 muss dann ebenfalls von der Polare des Mittelpunktes des gesuchten Kreises P berührt werden. — Der Mittelpunkt eines K_1, K_2 und K_3 berührenden Kreises ist deshalb der Pol der gemeinschaftlichen Tangente von Q_1 und Q_2 in Bezug auf K_1. — Man konstruiere nach diesen Andeutungen die gesuchten Berührungskreise.



IX. Abschnitt.

Dreieckskoordinaten.

1) Sind

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Gleichungen von drei Geraden, so kann man die Gleichung jeder anderen Geraden, z. B.:

$$mx + ny + p = 0 \quad . \quad (3)$$

immer auf die Form:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \quad (4)$$

bringen.

Multipliciert man nämlich die drei Gleichungen (1) der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3, und addiert dieselben, so erhält man:

$$\begin{aligned} &(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)\, x \\ +&(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3)\, y \\ +&\ c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Soll diese Gleichung identisch mit (3) sein, so folgt:

$$\begin{aligned} a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 &= m \\ b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 &= n \\ c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 &= p. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich aber u_1, u_2 und u_3 immer bestimmen, wenn nicht die Determinante:

1) Sind

$$\left.\begin{aligned} A_1 u + B_1 v + C_1 &= 0 \\ A_2 u + B_2 v + C_2 &= 0 \\ A_3 u + B_3 v + C_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Gleichungen von drei Punkten, so kann man die Gleichung eines jeden anderen Punktes, z. B.:

$$Mu + Nv + P = 0 \quad . \quad (3)$$

immer auf die Form:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \quad (4)$$

bringen.

Multipliciert man nämlich die drei Gleichungen (1) der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, und addiert dieselben, so erhält man:

$$\begin{aligned} &(A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3)\, u \\ +&(B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3)\, v \\ +&\ C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Soll diese Gleichung identisch mit (3) sein, so folgt:

$$\begin{aligned} A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 &= M \\ B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 &= N \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 &= P. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich aber x_1, x_2 und x_3 immer bestimmen, wenn nicht die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, welcher Fall ausgeschlossen bleibt.

Es wird also vorausgesetzt, dass die drei Geraden (1) nicht durch einen Punkt gehen (s. II, 56).

Sind nun x und y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden (3) bez. (4), so sind die Abstände desselben von den drei Geraden (1) bez.:

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

$$\frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{x_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$

$$\frac{a_3 x + b_3 y + c_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} = \frac{x_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}.$$

Hiernach sind x_1, x_2, x_3 die mit den Konstanten $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, bez. $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$, und $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ multiplicierten Abstände des Punktes (xy) von den drei Geraden (1); die Gleichung (4) stellt eine Beziehung zwischen diesen drei Abständen dar, welcher die letzteren für alle Punkte der Geraden (3) genügen müssen. —

Hierauf wird das System der Dreieckskoordinaten begründet. — Die Koordinaten eines Punktes sind drei Zahlen x_1, x_2, x_3, welche sich verhalten, wie die mit gewissen Konstanten multiplicierten Ab-

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, welcher Fall ausgeschlossen bleibt.

Es wird also vorausgesetzt, dass die drei Punkte (1) nicht auf einer Geraden liegen (s. II, 107).

Sind nun u und v die Koordinaten einer beliebigen Geraden, welche durch den Punkt (3) bez. (4) geht, so sind die Abstände derselben von den drei Punkten (1) bez.:

$$\frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{C_1 \sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{u_1}{C_1 \sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\frac{A_2 u + B_2 v + C_2}{C_2 \sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{u_2}{C_2 \sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\frac{A_3 u + B_3 v + C_3}{C_3 \sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{u_3}{C_3 \sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Hiernach sind u_1, u_2, u_3 die bez. mit den Konstanten C_1, C_2, C_3 und dem gemeinsamen Nenner $\sqrt{u^2 + v^2}$ multiplicierten Abstände der Geraden (uv) von den drei Punkten (1); die Gleichung (4) stellt eine Beziehung zwischen diesen drei Abständen dar, welcher die letzteren für alle durch den Punkt (3) gehenden Geraden genügen müssen.

Hierauf wird das System der Dreieckskoordinaten begründet. — Die Koordinaten einer Geraden sind drei Zahlen u_1, u_2, u_3, welche sich verhalten, wie die mit gewissen Konstanten multiplicierten Ab-

stände des Punktes von drei festen Geraden. — Die letzteren bilden das sog. Koordinatendreieck (oder Fundamentaldreieck). Die Gleichung einer Geraden wird in Dreieckskoordinaten durch die homogene Gleichung ersten Grades:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

ausgedrückt.

2) In Bezug auf rechtwinklige Koordinaten ist die Gleichung einer Geraden G:

$$4x + 3y - 25 = 0.$$

Wie heisst diese Gleichung in Dreieckskoordinaten, wenn die Geraden:

$$y - 1 = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x + y - 5 = 0$$

erste, zweite und dritte Seite des Koordinatendreiecks sind?

Antw.

$$3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0.$$

3) Ebenso die Gleichung der Geraden:

$$2x - 5y + 16 = 0$$

in Dreieckskoordinaten auszudrücken, wenn:

$$4x + 3y - 12 = 0$$
$$3x - 4y + 41 = 0$$
$$y + 18x - 104 = 0$$

die Gleichungen der Seiten des Koordinatendreiecks sind.

Antw.

$$22x_1 - 16x_2 - 5x_3 = 0.$$

4) Die Gleichung der Verbindungslinie der beiden Punkte

stände der Geraden von drei festen Punkten. — Die letzteren bilden die Ecken des sog. Koordinatendreiecks (Fundamentaldreieck). Die Gleichung eines Punktes wird in Dreieckskoordinaten durch die homogene Gleichung ersten Grades:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

ausgedrückt.

2) In Bezug auf rechtwinklige Koordinatenachsen ist die Gleichung eines Punktes P:

$$4u + 5v + 1 = 0.$$

Wie heisst diese Gleichung in Dreieckskoordinaten, wenn die Punkte:

$$u + v + 1 = 0$$
$$u + 2v + 1 = 0$$
$$2u + v + 1 = 0$$

erster, zweiter und dritter Eckpunkt des Koordinatendreiecks sind?

Antw.

$$6u_1 - 4u_2 - 3u_3 = 0.$$

3) Ebenso die Gleichung des Punktes:

$$2u + 3v + 1 = 0$$

in Dreieckskoordinaten auszudrücken, wenn die Eckpunkte des Koordinatendreiecks die Koordinaten (— 3, 8), (6, — 4), (5, 14) haben.

Antw.

$$13u_1 + 14u_2 + 3u_3 = 0.$$

4) Die Gleichung des Schnittpunktes P der beiden Geraden

$M_1(y_1, y_2, y_3)$, $M_2(z_1, z_2, z_3)$ zu finden.

Antw. $$\begin{vmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$P_1(v_1, v_2, v_3)$, $P_2(w_1, w_2, w_3)$ zu finden.

Antw. $$\begin{vmatrix} u_1, u_2, u_3 \\ v_1, v_2, v_3 \\ w_1, w_2, w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliciert man die letzte Horizontalreihe der Determinante mit einem willkürlichen Faktor k, und addiert sie alsdann zur zweiten Horizontalreihe, so erscheint die Gleichung der Geraden bez. des Punktes in der Form:

$$\begin{vmatrix} x_1 & , x_2 & , x_3 \\ y_1+kz_1, & y_2+kz_2, & y_3+kz_3 \\ z_1 & , z_2 & , z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Gleichung genügen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + kz_1 \\ x_2 &= y_2 + kz_2 \\ x_3 &= y_3 + kz_3 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

welche Ausdrücke somit die Koordinaten eines beweglichen Punktes der Geraden $M_1 M_2$ darstellen. — k ist auch in diesem Falle das mit einem konstanten Faktor multiplicierte Abstandsverhältnis dieses Punktes in Bezug auf die Punkte M_1 und M_2.

5) Die Koordinaten des Durchschnittes der beiden Geraden:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$
$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$$

zu finden.

Antw.

$$x_1 = m(u_2 v_3 - u_3 v_2)$$
$$x_2 = m(u_3 v_1 - u_1 v_3)$$
$$x_3 = m(u_1 v_2 - u_2 v_1),$$

wenn m ein beliebiger konstanter Faktor ist.

6) Multipliciert man die Gleichungen (6) der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3 und addiert, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} u_1 & , u_2 & , u_3 \\ v_1+kw_1, & v_2+kw_2, & v_3+kw_3 \\ w_1 & , w_2 & , w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Gleichung genügen:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= v_1 + kw_1 \\ u_2 &= v_2 + kw_2 \\ u_3 &= v_3 + kw_3 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

welche Ausdrücke somit die Koordinaten eines beweglichen Strahles, welcher durch den Punkt P geht, darstellen. k ist auch in diesem Falle das mit einem konstanten Faktor multiplicierte Abstandsverhältnis dieses Strahles in Bezug auf die beiden Geraden P_1 und P_2.

5) Die Koordinaten der Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$
$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$$

zu finden.

Antw.

$$u_1 = n(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$
$$u_2 = n(x_3 y_1 - x_1 y_3)$$
$$u_3 = n(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

wenn n ein beliebiger konstanter Faktor ist.

6) Multipliciert man die Gleichungen (6) der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3 und addiert, so erhält man:

Leipzig. Druck von Grimme & Trömel.